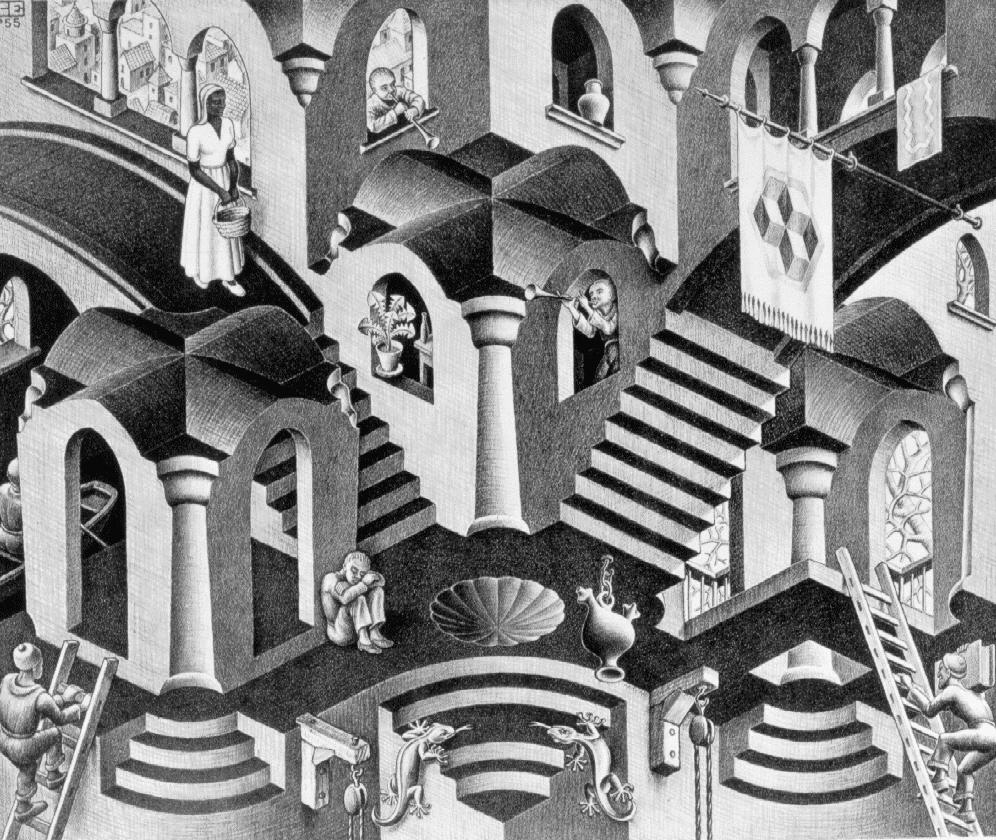
**קורס הכנה ללימודי מתמטיקה**

**בפקולטה למדעים מדוייקים**

**אוניברסיטת תל-אביב**

****

**כתבו וערכו: נעמי ואוהד פלדהיים**

**שיעור 1: רענון חומר מהתיכון**

**הקדמה**

כבר מתחילת לימודיכם באוניברסיטה, ייעשה שימוש תדיר במושגים ובכלים טכניים מלימודי התיכון (או לפחות, ממה שהאוניברסיטה מחשיבה כרקע של תלמידיה). כמעט ולא יוקדש זמן לרענון או חזרה על מושגים אלה במסגרת השיעורים האוניברסיטאיים. לכן, רוב עבודת הרענון היא עבודה אישית של התלמיד, ואנו ממליצים לעשות כמה שיותר ממנה עוד לפני תחילת הלימודים.

הנושאים שאנו ממליצים במיוחד לרענן הם:

* אינדוקציה
* חוקי חזקות ולוגריתמים
* קומבינטוריקה בסיסית
* טריגונומטריה
* פתרון משוואות ריבועיות
* נוסחאות לסכומי סדרה חשבונית והנדסית.

אנו נדבר על שלושת הנושאים הראשונים בלבד, בגלל מגבלות זמן ויעילות. לנוחיותכם מצורף למסמך זה גם **נספח** ובו תרגול שלושת הנושאים הנוספים ברשימה. מומלץ לעיין בו, ולהוסיף ולתרגל ממקורות אחרים כגון ספרי לימוד של התיכון וקבצי בגרויות.

**פרק ראשון: אינדוקציה**

אינדוקציה מתמטית היא שיטת הוכחה לטענות על המספרים הטבעיים. היא מבוססת על העקרון שאם טענה נכונה למספר מינימלי כלשהו , ואם העובדה שהטענה מתקיימת עבור  גוררת שהטענה נכונה גם עבור , אז בהכרח הטענה מתקיימת לכל .

תרגיל : אי-השוויון  נכון לכל המספרים הטבעיים, החל ממקום מסוים.

1. מצאו את הטבעי הקטן ביותר שעבורו אי-השוויון מתקיים.
2. הוכיחו באמצעות אינדוקציה שאי-השוויון מתקיים לכל טבעי החל מהמספר שמצאנו בסעיף הקודם.

פתרון :

1. נציב טבעיים בשני אגפי אי-השוויון, עד שנמצא מספר שעבורו הוא מתקיים :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

כלומר,  הינו הטבעי הקטן ביותר שעבורו אי-השוויון מתקיים.

1. נשתמש באינדוקציה ע"מ להראות שלכל  מתקיים .

מקרה בסיס -  : ראינו בסעיף הקודם כי : .

הנחת האינדוקציה : נניח את קיום אי-השוויון עבור , כלומר נניח כי : .

צעד האינדוקציה : נוכיח שאי-השוויון מתקיים גם עבור , כלומר : .

ע"פ הנחת האינדוקציה : .

נשים לב כי : .

נמצא עבור אלו ערכים של  מתקיים , כלומר לאילו ערכים מתקיים : .

 הינה פונק' ריבועית עם .

שורשיה יהיו : .

נשים לב כי , ולכן לכל  שגדול מהשורש הגדול  הפונק' הריבועית חיובית, ובפרט עבור .

כלומר, קיבלנו כי :  לכל , ומכאן כי : . לכן אי-השוויון מתקיים עבור , כנדרש.

תרגיל : הוכיחו כי לכל  טבעי מתקיים : , כאשר .

פתרון : נוכיח באמצעות אינדוקציה.

מקרה בסיס -  : נציב  באי-השוויון ונקבל : .

כלומר, במקרה זה ישנו שוויון, והטענה אומנם מתקיימת.

הנחת האינדוקציה : נניח את קיום הטענה עבור , כלומר נניח כי : .

צעד : נוכיח את קיום הטענה עבור , כלומר נראה כי : .

ע"פ הנחת האינדוקציה : , והיות ו-  נקבל כי . לכן : .

נשים לב גם כי מכך ש:  נובע כי : , לכן : .

באופן דומה נקבל גם כי : .

ומכאן כי : .

הראנו כי : , כלומר הטענה מתקיימת עבור , כנדרש.

**דוגמה חשובה לשימוש באינדוקציה**: כאשר מוכיחים נוסחאות לאיבר כללי וסכום של סדרה חשבונית או הנדסית. היזכרו בכך.

**פרק שני: פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות**

כזכור  אמ"מ .

עבור  עם  ו- ממשי כלשהו, ועבור  אז מתקיים :

|  |  |
| --- | --- |
| חוקי לוגריתם | חוקי חזקה |
| 1. ו- . |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

למשל: , . .

תרגיל :

1. פתרו את אי-השוויון .
2. נתון כי , הביעו את  באמצעות .

**תזכורת**: הפעלה של פונקציה מונוטונית עולה על אגפי אי שויון שומרת אותו; לדוגמה- כפל במספר חיובי. הפעלה של פונקציה מונוטונית יורדת הופכת אותו; לדוגמה – הכפלה במספר שלילי.

פתרון :

1. ראשית כל נשים לב שהביטוי  מוגדר עבור כלומר עבור .

היות ו- , אם נוציא לוגריתם מאגפי אי-השוויון נקבל : , ולכן אי-השוויון מוגדר עבור  בלבד.

לפי תכונה (v) אנו יודעים כי : ,

לכן אי-השוויון הנתון שקול לאי-השוויון הבא :

.

נזכור כי  אם"ם , ולכן אי-השוויון ישמר אם נעלה את  בחזקת הביטויים שבשני האגפים. מכאן כי אי-השוויון שקול לאי-השוויון הבא :



נכפיל את שני האגפים ב-  (נשים לב כי  לכל ), ונקבל :



נציב , ואז אי-השוויון יהפוך לאי-שוויון ריבועי : .

כאן , ולכן : , כלומר : .

נשים לב כי , ולכן אי-השוויון  מתקיים עבור .

כלומר : , אבל  לכל , ולכן התנאי  מיותר, מכאן כי אי-השוויון מתקיים עבור .

אם נוציא לוגריתם מאגפי אי-השוויון נקבל : , כלומר, אי-השוויון מתקיים לכל .

קיבלנו כי אי-השוויון מוגדר עבור  ומתקיים עבור , ולכן פתרון אי-השוויון יהיה עבור .

נבדוק ע"י הצבה :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

1. נתון כי : ****,

לכן : ****.

נשים לב כי : ****.

כמו-כן : ****.

כלומר : ****.

**פרק שלישי: קומבינטוריקה וזהויות**

מס' האפשרויות לסדר  עצמים שונים, עם חשיבות לסדר הינו .

הסבר : ישנן  אפשרויות לאיבר הראשון,  אפשרויות לאיבר השני,  אפשרויות לאיבר השלישי וכך הלאה. סה"כ יש לנו  אפשרויות לסידור כל האיברים.

מס' האפשרויות לבחור  עצמים שונים מתוך  עצמים (ללא חשיבות לסדר וללא חזרות) הינו .

הסבר : למעשה אנו יכולים לסדר את כל  האיברים, ולבחור רק את  האיברים הראשונים. מס' האפשרויות לסידור  האיברים הוא , אבל היות ואין חשיבות לסדר הפנימי בין  האיברים הראשונים ובין  האיברים האחרונים, עלינו לחלק ב-  וב- . מכאן נקבל כי מס' האפשרויות הינו .

דוגמה: לברוך יש 15 גרביים, כל אחת בצבע שונה. כמה זוגות הוא יכול להרכיב?

.

שאלה: מהו מספר האפשרויות לבחור  עצמים שונים מתוך  עצמים *עם חשיבות לסדר וללא חזרות?* (לדוגמה, כשבא לי להרכיב playlist ואני לא רוצה לשמוע את אותו שיר פעמיים)

תשובה: .

שאלה: מהו מספר האפשרויות *עם חשיבות לסדר ועם החזרות?* (שוב עליי להרכיב playlist אבל הפעם כל השירים אהובים עליי מאוד ולכן לא אכפת לי לשמוע כל שיר כמה פעמים שיצא).

תשובה: .

שאלה: נתונים 11 ספרי אנגלית ו-9 ספרי מתמטיקה על מדף. בכמה דרכים ניתן...

א. לסדר את הספרים על המדף, אם בכל קטגוריה הספרים זהים:

ב. לסדר את הספרים על המדף, אם בכל קטגוריה הספרים שונים, וכל ספרי אנגלית צמודים זה לזה:

יש בעצם 10 עצמים, כשלעצם האחרון (הוא כל הספרים באנגלית) יש סידורים פנימיים של 11 עצמים שונים. כלומר .

ג. לבחור 3 ספרים מהמדף שאינם כולם מאותה קטגוריה? .

תרגיל: הוכיחו את הזהות .

ישנו פתרון אלגברי, אך ניתן גם לפתור בלי חישוב, בעזרת "סיפור קומבינטורי": שני האגפים מתארים בחירה של n עצמים מתוך קבוצה שמכילה a עצמים אדומים ו-b עצמים כחולים. באגף שמאל רשום ביטוי שסופר זאת ישירות (בלי לזכור את הצבע של כל פריט), ובאגף ימין עוברים על כל האפשרויות, לפי מספר העצמים האדומים שנבחרו – הוא k. המספר k יכול להיות כל דבר בין 0 ל-n, ובהתאם (על כל שליפה של k אדומים), יש לשלוף n-k כחולים. מכאן הנוסחה ברורה.

תרגיל : הוכיחו את בינום ניוטון .

פתרון : נשים לב , כלומר עלינו לסכום את כל האפשרויות של בחירת  או  מכל אחד מהסוגריים. נשים לב כי :

* אנו יכולים לבחור את  בין  ל-  פעמים.
* עלינו תמיד לבצע  בחירות, לכן אם בחרנו ב-  בדיוק  פעמים, עלינו לבחור ב-  בדיוק פעמים. במקרה כזה נקבל את הגורם .
* מספר האפשרויות לבחור את  בדיוק  פעמים מתוך  סוגרים, הוא כמספר האפשרויות לבחור  איברים מתוך  אפשרויות (אנו בוחרים את  הסוגרים שבהם נבחר ב- ), כלומר .

תרגיל : הוכיחו את זהות פסקל .

דרך א': סיפור קומבינטורי (חשבו כיצד!)

דרך ב': חישוב.



**נוסחאות כפל מקוצר** (תרגיל: הוכיחו!)





**- דף תרגיל 1: אינדוקציה, לוגריתמים, קומבינטוריקה -**

1. פתרו את המשוואות ואת אי השויונות הבאים:
   1. 
   2. 
   3.  (שימו לב שלוגריתם עלול להיות שלילי)
   4. 
2. הוכיחו כי לכל טבעי  ולכל **** מתקיים: **.**
3. הוכיחו באינדוקציה כי לכל טבעי  מתקיים: ****. (השוו זאת לנוסחת סכום סדרה חשבונית.)
4. הוכיחו (באינדוקציה) כי לכל מספר ממשי  ולכל שלם חיובי  מתקיים: .
5. הוכיחו את זהות פסקל: לכל שני מספרים טבעיים  מתקיים:



1. יש לי 2 ספרי מתמטיקה, 3 ספרי פיזיקה ו-1 ספר אומנות.
   1. בכמה דרכים אוכל לבחור 2 ספרים לנסיעה מקטגוריות שונות?
   2. בכמה דרכים אוכל לבחור 2 ספרים שאינם מתמטיים (לאו דווקא מקטגוריות שונות)?
   3. בכמה דרכים אוכל לסדר אותם על המדף, כאשר אקפיד להפריד בין קטגוריות?
2. פשטו את הביטויים הבאים לפי ההוראות:
   1.  (כתבו כמכפלה עם כמה שיותר גורמים)
   2.  (כתבו כסכום לפי בינום ניוטון)
   3.  (רמז: העזרו בסדרות הנדסיות)

**מבוא לשיעורי לוגיקה (שיעורים 2, 3)**

אחד הגורמים הבולטים לכישלונם של תלמידים בשנה הראשונה בתואר ראשון במתמטיקה, הוא קשיים בהבנת המושג הוכחה וחוסר יכולת להפריד בין מה שנראה נכון מתוך השכל הישר ומה שנובע מחוקי הלוגיקה וההיסק. בפרק זה ננסה להתגבר על קשיים אלו באמצעות הגדרה והבהרה של כללי ההיסק הנהוגים במתמטיקה, תרגול השימוש בהם והצגה של טעויות בולטות. האמצעי הבטוח והאפקטיבי ביותר ללמידת אומנות כתיבת ההוכחה עבור התלמיד המתחיל הוא התרגול. גם לאחר תרגול רק אומנות הכתיבה הבהירה והמדויקת קשה ומאתגרת גם לבעלי תארים מתקדמים.

**שיעור 2: תחשיב הפסוקים**

אומנם בימי קדם המתמטיקה הסתמכה בעיקר על השכל הישר. ואולם כבר בתקופה היוונית שיטה זו הובילה לטעויות ולסתירות, וזאת משום שהשכל הישר לעיתים קרובות מוליך אותנו שולל. דוגמא מפורסמת לכך הוא טיעונו השגוי של זנון שלא יתכן שאוסף של נקודות שאין להן אורך יצור ביחד קו שיש לו אורך. אין ספק שטיעון זה מבלבל ואולם מסתבר שהוא אינו נכון.

כדי להבחין בין אמת ושקר מגדירה המתמטיקה שפה מובנית שבה ניתן לדבר על אובייקטים מתמטיים וכללי היסק שבאמצעותם ניתן לגזור אמיתות מתוך אמיתות אחרות. נתחיל בהיכרות עם שפה זו.

הלוגיקה היא שפה הפועלת על פסוקים, כלומר משפטים שניתן ליחס להם ערך אמת או שקר. במתמטיקה אנו מתחילים משורה של משפטים בסיסיים הנקראים אקסיומות, אשר אותם אנו מקבלים כמובנים מאליהם. דוגמא לאקסיומה היא: דרך שתי נקודות עובר קו ישר אחד. מטרת הלוגיקה היא להרחיב מתוך האקסיומות את משפחת הפסוקים האמיתיים והשקריים.

לעיתים קרובות בקורסים שתלמדו לא יטרח המרצה ויגדיר אקסיומות, ולכן גם כאן לא נקדיש את מירב המאמץ להבין איך בונים מן האקסיומות היסודיות של המתמטיקה באמצעות כלים שונים את כל פסוקי האמת, ולא נתעמק באקסיומות עצמן. מבחינתנו הלוגיקה פועלת על כל משפט שאנו יכולים מתוך הסכמה בינינו להעניק לו ערך **אמת** או **שקר**. הלוגיקה תבטיח לנו שאם משפטים אלו שעליהם התבססנו אכן מקבלים ב"מציאות" את ערכי האמת שייחסנו להם, אז מסקנותיה יהיו אמיתיות גם כן.

בכדי להשתמש בלוגיקה על טענות מתמטיות, עלינו לנסח אותן בשפה זו. פעולה זו נקראת **הצרנה** (לשון מתן צורה) ותכליתה רישום הטענה באותיות לוגיות. הצרנה יכולה לסייע לכם כאשר אינכם בטוחים בוודאות כי טענה היא אכן נכונה. משעברה הטענה לצורתה הפורמאלית, ניתן להפעיל עליה פעולות שונות ולבדוק את נכונותה.

החלק היסודי הפשוט ביותר בלוגיקה הוא היחס. היחס מקבל פסוק אחד או יותר ומייצר פסוק חדש. אמיתות הפסוק החדש נקבעת לפי טיב היחס ואמיתות הפסוקים שהוכנסו אליו. למשל היחס *שלילה* מקבל פסוק אחד, נסמנו ב-A, ומחזיר פסוק חדש "לא A". הפסוק החדש מקבל את הערך אמת אם A קיבל את הערך שקר ולהפך.

נוח לתאר כל יחס באמצעות טבלה, ולהעניק לו סימן. למשל עבור היחס שלילה:

|  |  |
| --- | --- |
| A¬ | A |
| F | T |
| T | F |

טבלאות יכולות גם לתאר את אמיתותם של פסוקים מורכבים יותר כפי שנראה בהמשך. לאותיות A,B... אנו קוראים משתנים. כאשר בסעיפים שונים נעשה שימוש באותה אות לא יהיה קשר בין המשתנים שהיא מייצגת. נחריב את הדיבור על נושא זה בשיעור 2.

בתוך טקסט מתמטי נהוג לשלב את היחסים בצורה טבעית, ולכן אם אנחנו מדברים על הפסוק: "שש הוא ראשוני" אז שלילתו תהיה "שש הוא אינו ראשוני" ולא "לא שש הוא ראשוני". לצורות אלו יש להתרגל.

הלוגיקה הבסיסית מציגה לנו את היחסים הבסיסיים הבאים: שלילה, גרירה, שקילות, או, וגם.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ניסוחים בשפה פורמלית | טבלה | שם | סימן |
| A שקול לB.  A וB שקולים.  להראות את A שקול ללהראות את B.  A אם ורק אם B. | |  |  |  | | --- | --- | --- | | B↔A | B | A | | T | T | T | | F | T | F | | F | F | T | | T | F | F | | שקילות | B↔A  דוגמא: |
| מA נובע B.  A גורר את B.  אם A אז B.  רק אם B אז A.  על מנת להראות את B די להראות את A | |  |  |  | | --- | --- | --- | | B→A | B | A | | T | T | T | | T | T | F | | F | F | T | | T | F | F | | גרירה | B→A  דוגמא: |
| A או B.  מתקיים A או שמתקיים B | |  |  |  | | --- | --- | --- | | BA | B | A | | T | T | T | | T | T | F | | T | F | T | | F | F | F | | או | BA |
| A וגם B  מתקיים A וגם מתקיים B | |  |  |  | | --- | --- | --- | | BA | B | A | | T | T | T | | F | T | F | | F | F | T | | F | F | F | | וגם | BA |
| שלילת A  לא A  אינו A | |  |  | | --- | --- | | A¬ | A | | F | T | | T | F | | שלילה | A¬ |

חשוב לשים לב ש"או" במובן המתמטי אינו זהה לאו במובן היום יומי. כלומר אין ודאות שרק אחד מבין שני הפסוקים A או B מתקיימים, ויתכן ששניהם מתקיימים גם יחד. עוד יש לשים לב שיחס הגרירה אינו אינטואיטיבי, שכן איננו נוהגים בשפת היום-יום לחשוב על משפטים כמו: "אם אני צנצנת אז 6 מתחלק ב3" בתור אמיתיים (בעיקר כיוון שהם חסרי משמעות). גם המשפט "אם אני צנצנת אז 6 מתחלק ב-7" הוא אמת.

כאשר רוצים לכתוב טבלה של יחס מורכב, נוכל להציב ערכי אמת בפסוקים היסודיים שלו ולבחון את ערך האמת שלו בעזרת הטבלאות של היחסים המרכיבים אותו:

**דוגמא 1.1:** נכתוב טבלה עבור : (B→A) ↔(B A¬)



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| (B→A) ↔(B A¬) | (B→A) | (B A¬) | A¬ | B | A |
| T | T | T | F | T | T |
| T | T | T | T | T | F |
| T | F | F | F | F | T |
| T | T | T | T | F | F |

נשים לב שקיבלנו טבלה שכולה ערכי אמת. טבלה כזו נקראת טאוטולוגיה או "נכונה"(באופן כללי), טבלה שכל ערכיה הם שקר נקראת סתירה.

הוכחה היא תהליך שבו אנו משתכנעים שטענה מסוימת היא טאוטולוגיה. אחד הכלים המותרים בשימוש בהוכחה הוא בדיקת טבלאות האמת. לכן, תהליך הבדיקה שביצענו בדוגמא יכול להיכתב גם כהוכחה. שימו לב שהוכחת שקילות, דורשת מאיתנו להראות שערכי האמת של שני צדדי השקילות זהים (ראו טבלה).

**טענה:** הטענה "או ש-A לא מתקיים או ש-B מתקיים" שקולה לטענה "A גורר את B".

**הוכחה:** נבחן את ארבעת המקרים. אם A מתקיים, וB מתקיים, הרי שהטענה הראשונה נכונה, וגם הטענה השנייה נכונה. כך גם אם A לא מתקיים, וB מתקיים, ואם A לא מתקיים וB לא מתקיים. במקרה האחרון, אם A מתקיים וB לא מתקיים, שתי הטענות שגויות.

קל לראות שהוכחה זו היא מסורבלת ודורשת מאמץ רב מן הקורא, ואף על פי כן היא נכונה. למרות זאת נוכל לנסח כמה פסוקי עזר שכולם טאוטולוגיות ויסייעו לנו לפשט את ההוכחה:

**תרגיל 1.1:** הוכיחו את הטענות הבאות באמצעות בדיקה בטבלה.

(B¬ A¬) ↔ (BA) ¬ (A¬ B¬) ↔ (BA) ¬ A ↔ ((A) ¬)¬



שני החוקים מצד ימין בתרגיל 1.1 נקראים "חוקי דה-מורגן". אם הוכחנו אחד מהם, אפשר להוכיח את השני ממנו בלי בדיקה בטבלה. נתרגל זאת:

**דוגמה:** נניח שבדקנו כי (B¬ A¬) ↔ (BA) ¬. נשים שלילה על שני אגפי השקלות:



(B¬ A¬)¬ ↔ (BA)



(שימו לב – שלילה כפולה התבטלה, לפי התכונה הכי שמאלית בתרגיל 1.1).

עכשיו נסמן . קבלנו:

*וזה מה שרצינו (עם אותיות אחרות אמנם, אך זה משפט כללי – נכונותו לא תלויה בסימון האותיות שלנו).*

מרבית הטענות במתמטיקה מורכבות ביסודן מגרירה או משקילות. לעיתים קרובות ההוכחה תהיה מורכבת מרצף של שקילויות כאשר השקילות האחרונה תהיה לטאוטולוגיה ידועה. שימו לב שרק טאוטולוגיות שקולות לטאוטולוגיות.

הבה ננסח כמה כללים לעבודה עם גרירות:

**תרגיל 1.2:** הוכיחו את הטענות הבאות באמצעות בדיקה בטבלה (או באמצעות שרשרת גרירות המתבססת על טענות שכבר הוכחתם).

(A¬→B¬) ↔ (B→A) ( (B→A) (A→B) )↔ (B↔A) (B→A) → ( (B→C) (C→A) )



לעיתים נוח יותר במתמטיקה להראות ששלילת טענה היא סתירה מאשר להראות כי הטענה עצמה היא טאוטולוגיה. במקרה כזה ההוכחה נקראת בדרך השלילה.

לסיום החלק האבסטרקטי של השיעור נבקש מהקורא לפתור את התרגיל הבא:

**תרגיל 1.3:** היחס ⊕(קרי קסור, או אִיוְוּיִ אקסקלוסיבי) מתאר במתמטיקה את היחס "או" כפי שהוא מבוטא בשפת היום יום. מצא נוסחא שתתאר את היחס, וצייר טבלה שלו.

על מנת להבין כיצד כל זה מתחבר ללימודי המתמטיקה, ניקח כדוגמא שאלות בגיאומטריה. נסמן נקודות באותיות קטנות, וישרים באותיות גדולות. נסמן אם הישר A עובר דרך הנקודה b. כמו כן כנהוג בלוגיקה תמיד (לא נציין זאת מעתה) נשתמש בסימן שוויון כאשר הטענה X=X היא טאוטולוגיה. נסמן A||B לציין שA מקביל לB. הסימון A≠B שקול לסימון (B=A)¬.

נניח בתור בסיס את ההנחות הבאות:

1. דרך ישרים מקבילים לא עוברת נקודה משותפת.
2. אם ישר אחד מקביל לישר שני אז גם השני מקביל אליו.
3. דרך שתי נקודות שונות עובר לכל היותר ישר אחד.
4. אם יש מקביל לשני ישרים אחרים שונים אז גם הם מקבילים זה לזה.

**תרגיל 1.4:** נסח את הנחות הבסיס בשפה פורמלית. (פתרון בעמוד הבא)

1. (A||B)¬ → .
2. B||A→A||B
3. A=B→,

שימו לב שיתכן שכתבתם טענות אחרות אך לא טעיתם בתרגיל. זאת בתנאי שהטענות שנכתבו שקולות להנחות הבסיס. בנוסף שימו לב לקיצור אפשרי: במקום ניתן לרשום (בדיוק כמו שבמקום נהוג לרשום .

אנו רושמים שתי אותיות שונות, אין זה אומר שערכים שהן מקבלות שונים, זו צורת עבודה מבלבלת במקצת שמקשה על תלמידי השנים הראשונות, אך היא משתלמת בהמשך.

כאשר כתבנו את טענות הבסיס על אותיות שונות התכוונו שאם נציב כל ישר במקום אות גדולה ונקודה במקום אות קטנה הטענות תהיינה נכונות. את העיסוק הפורמלי ברעיון של "כל הצבה של אובייקט מסוים" אנו דוחים לשיעור הבא.

כעת ננסה להוכיח כמה טענות במסגרת מערכת האקסיומות שלנו:

**תרגיל 1.5:** הוכח את הטענות הבאות במסגרת מערכת האקסיומות שנוסחה לעיל:

1. אם A וB- שונים ונחתכים (כלומר יש עליהם נקודה משותפת) וA מקביל לC אזי B לא מקביל לC.
2. אם A מקביל לשני ישרים שונים B ו-C אזי B לא נחתך עם C.
3. אם a,b,c שונות ביניהן ונמצאות על ישר מסוים וb,c,d שונות ביניהן ונמצאות על ישר מסוים, אז כולן על אותו הישר.
4. אם a,b,c קודקודים במשולש (כלומר יש ישר בין כל זוג שלהן) אז ישר A יכול להקביל לכל היותר לצלע אחת מצלעות המשולש.
5. אם על ישר נקודה אחת לפחות אז הוא לא מקביל לעצמו.

הוכח את הטענות באופן פורמלי ולאחר מכן כתוב הוכחה במילים.

טענה 5 משונה במקצת כיוון שהיא אינה מסתדרת עם ההיגיון הגיאומטרי שלנו. יכולנו להפוך אותה לשקרית אם היינו משנים את הנחת היסוד הראשונה כך שלא תפעל על שני ישרים זהים.

נשים לב לכלל הזהב בבניית הוכחה:

"בהוכחה תמיד מותר לנו להחליף בטענה כל פסוק בפסוק שקול לו וכל משתנה במשתנה שווה לו".

**סקיצה לפתרון 1.5:** (שוב, יש עוד דרכי הוכחה אפשריות!)

1. צ"ל: .

מאקסיומה (I) נובע ש- . נניח בשלילה ש- . בעזרת שינוי שמות באקסיומה (IV) נקבל

.  *כל התנאים לפני הגרירה מתקיימים אצלנו, לכן גם המסקנה . אך זו סתירה! לכן ההנחה בשלילה שגויה, כלומר .*

*2. צ"ל: .*

*נניח בשלילה שיש נקודה . מאקסיומה (I) נובע כי . מצד שני, מהנתונים שלנו נובע, ע"פ אקסיומה (IV) כי וזו סתירה.*

*3. צ"ל: (במקום ה- באופן פורמלי צריכים לרשום אי שוויונות בין כל זוגות הנקודות).*

*הפעם פשוט נתעלם מהנתונים על הנקודות a, d ונשתמש רק בנתון על הנקודות b,c. הפעלה של אקסיומה (III) נותנת מיד כי A=B.*

*4. נסמן את צלעות המשולש ב-B, C, D. כל אחד מישרים אלה מכיל שתיים בדיוק מהנקודות . לכן אלה ישרים שונים שלכל שניים מהם יש נקודה משותפת (נחתכים).*

*נניח בשלילה כי ישר אחר A מקביל לשתיים מהן, בלי הגבלה נאמר ש- . כיוון ש- , נקבל מאקסיומה (IV) כי . אך ל-B ול-C יש נקודה משותפת, לכן לפי אקסיומה (I ) נקבל , סתירה.*

**לסיכום: כלים מרכזים להוכחה** –

1. בדיקת ערכי אמת בטבלה.
2. שימוש בכללים ושקילויות שכבר הוכחנו.
3. עבור גרירה ניתן להניח את A בתור נתון, ובעזרת שרשרת גרירות להראות ש-B מתקיים.

עבור שקילות ניתן לחזור על אותו תהליך, פעם עבור ופעם עבור .

1. בשלילה: מניחים כי המסקנה אינה נכונה, ומסיקים סתירה לנתונים.

**- דף תרגיל 2: גרירות והצרנות -**

1. קבע האם הטענות הבאות הן נכונות או שקריות (אין צורך להוכיח).
   1. אם מספר שלם מתחלק ב2 וב6 אזי הוא מתחלק ב12
   2. אם מספר שלם מתחלק ב4 וב3 אזי הוא מתחלק ב12
   3. אם מספר שלם הוא ריבוע של מספר שלם אחר אזי ספרת האחדות שלו היא 1.
   4. אם מספר שלם הוא ריבוע של מספר שלם אחר אזי ספרת האחדות שלו היא 2.
   5. אם 18 מתחלק ב2 וב4 אזי הוא מתחלק ב6.
   6. אם אזי 100 הוא המספר השלם הגדול ביותר.
2. הוכיחו כי הטענות הבאות נכונות (מותר להסתמך על טענות מהכיתה):
   1. B → (( B→ A) A)



* 1. (A↔ C) → ((A→ C) ( C→ B) ( B→ A))



* 1. ((A↔ C) C)↔ B) ( B↔ A))↔ ((A→ C) ( C→ B) ( B→ A)) [היעזרו ב-**ב.**]



*הערה: טענה א' נקראת מודוס פוננדו פוננס והיא נחשבת לבסיס תורת ההיסק, טענה ג' משמשת לעיתים קרובות לקיצור הוכחות של שקילות.*

1. האם הטענות הבאות נכונות?
   1. 
   2. 

בשאלות הבאות נתייחס למערכת הנחות יסוד חדשה. במערכת זו יש שני איברים מיוחדים: 0 ו-1 (לאו דווקא שונים), פעולות כפל וחיבור.

1. הוכח את הטענות הבאות:
   1. אם אז או ש- או ש-.
   2. אם אזי 1 או .
   3. 1+1=1 גורר . (בלי תלות בb !!)

נוסיף את הפעולה "–" שמקיימת את כל האקסיומות של + ובנוסף: .

נוסיף את הפעולה ":" שמוגדרת ע"י כאשר הוא מספר כך ש- . פעולה זו מוגדרת ל- b≠0.

1. נמק את כל השלבים הנכונים בהוכחה הבאה ומצא את השגיאה:
2. מצא את השגיאה בהוכחה הבאה:



**שיעור 3: כמתים לוגיים ותחומי קשירה.**

הלוגיקה כפי שהכרנו אותה עד כה הייתה מוגבלת לטענות כלליות על משתנים שיכלו לקבל כל ערך. היא עסקה רק ביחסים בין טענות כאלו ולעולם לא באובייקטים ספציפיים. בתרגיל 1, שאלות 3 ו4, ראינו דוגמא שונה במקצת. שם הוצגו גם אלמנטים בעלי שם ונטענו לגביהם טענות.

ככלל מובן שניתן להחליף כל טענה כללית בטענה ספציפית על איבר כלשהו במרחב שבו אנו עוסקים. פעולה זו המכונה הצבה תבטל את שורת המשתנה בטבלת האמת, ואם נציב שמות בכל המשתנים נקבל פסוק סגור המקבל ערך *אמת* או *שקר*. נראה דוגמא לכך:

הנה טענה כללית: *מספר x גדול ממספר y וגם מתחלק בו.*

ערכי האמת של טענה זו משתנים כתלות בערך האמת של הטענות x>y ו- y|x, לפי טבלת האמת של וגם. אם נחליף את המשתנים במספרים למשל באופן הבא:

*7 גדול מ5 וגם מתחלק בו.*

נקבל טענה שקרית, שכן היא גימום של טענה שקרית וטענה אמיתית.

אם נחליף את המשתנים דווקא באופן הבא:

*10 גדול מ5 וגם מתחלק בו.*

נקבל טענה אמיתית. כך או כך נקבל תמיד פשוט את הערך *אמת* או *שקר*.

ואולם, ישנה עוד דרך לסגור פסוק לוגי והיא על ידי כמתים. בלוגיקה קיימים שני כמתים, *לכל* ו*קיים*. נתחיל בדוגמה לא מספרית:

*כל הספרים בהרצליה – שמם מכיל בדיוק 3 אותיות.*

כדי להיווכח בנכונות הטענה, נצטרך לעבור על כל המספרות בהרצליה, ולבדוק אם שם הספר מכיל 3 אותיות. באמת, במהלך טיול ברחוב המרכזי בהרצליה, נבחין במספרות של רמי, עמי, תמי, משה, ארז, גבע. כל אלה מאששים, אך עדיין לא מוכיחים, את נכונות הטענה. לאחר שנעבור על **כל** המספרות בעיר כולן, נוכל להיות בטוחים באחת מ-2 אפשרויות:

1. באמת **כל** הספרים בעלי שם עם 3 אותיות, ***או***

2. **קיים** ספר, לפחות אחד, ששמו אינו מכיל 3 אותיות.

במקרה 1 – הוכחנו כי הטענה נכונה, במקרה 2 – הפרכנו **ע"י דוגמה נגדית**. למשל, ברגע שנגיע למספרה של חיים – אין טעם לסרוק את העיר עוד, אנו בטוחים שהטענה שקרית. השתכנעו ש-1 ו-2 הם באמת הפכים, כלומר לא תיתכן אפשרות שלישית!

וכעת לדוגמאות מתמטיות:

1. לכל מספר שלם x, מתקיים 2x גדול או שווה לx.
2. לכל מספר שלם x, מתקיים x גדול או שווה ל0.
3. קיים מספר שלם x, כך ש x גדול או שווה ל0.
4. קיים מספר שלם x, קטן מ1 וגדול מ0.

קל להיווכח שכל אחת מהטענות האלו מקבלת פשוט ערך *אמת* או *שקר*.בפרט 1,3 אמיתיות ו2,4 שקריות.

**לכל:** כאשר אנו אומרים שלכל x מתקיימת טענה מסוימת, הרי שהטענה חדלה להיות פרדיקט שתלוי בנכונות הטענה על x, היא אינה תלויה בהצבה של x. במקום, היא מקבלת ערך אמת אם היא נכונה עבור כל ערך שנציב במשתנה מתוך מרחב מסוים שהגדרנו ושקר אחרת. כיוון שהלוגיקה המתמטית אינה מגדירה את אוסף כל האובייקטים שניתן להציב בטענות, איננו משתמשים במילה "לכל" אלא בצרוף קבוצה מוכרת. כך למשל "לכל מספר טבעי", או "לכל פונקציה". אם המרחב שהגדרנו ריק, הרי שבוודאי הטענה מתקיימת לכל איבר שם ולכן היא נכונה. למשל:

*"לכל ילד אנושי שנולד לפרה יש אוזניים מחודדות."*

טענה זו נכונה שכן אין אף ילד אנושי שנולד לפרה, ולכן לא נוכל לבדוק אותה על אף ילד. בתור דוגמא מתמטית נוכל לתת את הטענה הבאה:

*"כל מספר טבעי שקטן מ1 מתחלק ב100."*

כיוון שאין מספרים טבעיים שקטנים מ1 הטענה *נכונה*. היזהרו! לעיתים ניתקל בטענות כאלו באופן טבעי.

**קיים:** הכמת טוען שיש איזו שהיא הצבה בתוך קבוצת ההצבות שתיתן ערך אמת לטענה ולכאורה על מנת להוכיחו עלינו למצוא אותה. למשל הטענה קיים מספר טבעי זוגי נכונה משום שהמספר 2 מקיים אותה. לולא היכרנו את 2, יתכן שהיינו מתקשים להוכיח את הטענה. בטענות קיים נוכל במהלך ההוכחה להשתמש בנימוק מהסוג:

(a נמצא בקבוצה S ועבורו מתקיים A) גורר (קיים x בקבוצה S עבורו מתקיים A).

זהו כלל היסק חדש, שנוסף על כללי ההיסק שאנו כבר מכירים, הוא אינו נובע מטבלאות אמת אלא מהגדרתו של קיים.

רוב הטענות במתמטיקה מכילות לפחות כמת אחד.

**רישום פורמלי של כמתים**

לכל אחד משני הכמתים קיים סימן לוגי מיוחד. סימנו של הכמת לכל הוא \forall  ואילו הכמת של קיים הוא \exists . לאחר הכמת מופיע המשתנה עליו מכמתים ולאיזו קבוצה הוא שייך. למשל הרישום  פירושו קיים x בN, כלומר x טבעי. נצרין כעת את הטענה – קיים מספר טבעי שהוא ריבוע של עצמו: 

שימו לב לאפשרויות **הפיסוק**: כל האפשרויות הבאות למעשה שקולות:





.

לכל כמת יש **תחום קשירה**, כלומר אוסף נוסחאות שהוא תקף ביחס אליהן. כאשר יוצאים מתחום הקשירה האות שאליה נקשר הכמת משתחררת ויכולה לייצג דבר אחר. למשל בטענה:



שהנה הצרנה של המשפט – או שקיים מספר טבעי ששווה לריבוע שלו, או שקיים מספר טבעי שגדול מעצמו. אין קשר בין שני המופעים של המשתנה x. כדי לסמן את תחום הקשירה של המשתנה אנו מקיפים אותו בסוגריים. כאשר התחום הוא הטענה כולה ניתן ואף נהוג להשמיט את הסוגריים.

נשווה את הדוגמה הקודמת לטענה:

המשפט הזה הוא אמת, כמו המשפט הקודם, אבל הוא שונה במשמעותו.

**הוכחה של טענות עם כמת יחיד**

הוכחה של טענות "לכל" אינה שונה באופן מהותי מההוכחות בהן נתקלנו בפרק הקודם. הדבר נובע מכך שטענת לכל דומה לטענת גרירה: עלינו להוכיח שכל אימת שהתנאי מתקיים, גם המסקנה מתקיימת. הדרך הנאיבית להוכיח טענת לכל היא **לעבור על כל האפשרויות.**

דוגמאות:

* כל המספרים האי-זוגיים בין 2 ל-8 הם ראשוניים.
* הטענה "*כל מספר הוא זוגי או לא זוגי*" נכונה משום שהטענה "A או לא A" היא טאוטולוגיה.
* לכל x ממשי מתקיים . הוכחה: יהי x מספר ממשי. ידוע ש- וכמובן , מחיבור אי שויונות נקבל את הדרוש.

הוכחה של טענות "קיים" שונה, במקרה זה נוכל להסתמך על דוגמא, כלומר על **בחירה ספציפית** של איבר מתוך הקבוצה שעבורו הטענה מתקיימת. למשל:

* טענה: *"יש מספר שהוא שורש של עצמו".* הוכחה: 1 הוא מספר והוא השורש של עצמו. □
* קיים שורש למשוואה . הוכחה: נמצא אותו. או, שמתאוריה מוכרת נראה שהדיסקרמיננטה אי-שלילית, לכן הוא קיים.

לפעמים נוכל גם להסתמך על טענת קיים נכונה אחרת ולהראות שהאיבר שמובטח על ידה מקיים גם את הטענה החדשה. אנו משתמשים בנימוקים כאלו בשפת היום-יום כאשר אנחנו אומרים קל וחומר למשל:

טענות נכונות וידועות: "לכל אדם יש אבא ואמא", "קיים אדם".

מסקנה: קיים אדם שנולד לו בן שנולד לו בן שנולד לו בן.

הוכחה: יהי A האדם שמובטח על ידי הטענה שקיים אדם (עליה הסכמנו). יש לו אבא, לאבא זה יש אבא ולאבא זה גם כן יש אבא נסמנו C. כיוון שאם A אבא של B אז B אבא של A, הרי של C יש בן שיש לו בן שיש לו בן כנדרש. □

**שלילה של טענות עם כמת יחיד**

כיצד נשלול את הטענה: "כל הדובים שחורים"?

כמובן שנוכל לכתוב "לא כל הדובים שחורים", אבל גם נוכל לרשום "קיים דוב שאינו שחור". באופן דומה כיצד נשלול את הטענה "קיים דוב שחור"? פשוט: "לא קיים דוב שחור" או "כל הדובים לא שחורים".

ננסח אפוא כלל:

**כלל 2.1:** שלילה מדלגת מעל כמת והופכת אותו. או בכתיב פורמלי:

**חוקי פילוג**

שימו לב להבדל בין:  F (להפריך)

לבין  T (להוכיח)

בדומה ניתן לקחת אותה טענה עם כמת "קיים" והפרדה של "וגם" ולראות שיש הבדל. דוגמה נוספת:

(להפריך)

(להוכיח)

לעומת זאת, יש לנו כלל:

**כלל 2.2:** . "לכל" מתפלג מעל "וגם", "קיים" מתפלג מעל "או", אך לא בצירופים אחרים.





**תרגיל 2.1:** הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

1. . אח"כ אותה טענה עם כמת קיום.
2. *.*
3. *.*

**ריבוי כמתים**

כאשר לפנינו מספר כמתים שונים בזה אחר זה, יש חשיבות גדולה לסדר שלהם. כך למשל המשפטים:

1. לכל מספר טבעי x קיים מספר טבעי y מתקיים y=x+1.
2. קיים מספר טבעי y כל שלכל מספר טבעי x מתקיים y=x+1.

המשפט הראשון נכון ואילו השני שקרי. טעויות כאלו הן מקור לבלבול רב בשנה הראשונה במתמטיקה. הכלל הוא שכל משתנה שנקשר לכמת יכול להיות תלוי במשתנים שנקבעו לפני אך לא באלו שיבואו אחריו. אפשר לחשוב על תהליך זה כמו על המשחק הבא:

שני שחקנים המתמטיקה והמוכיח מתווכחים על נכונות של טענה A(x,y,z). בכל פעם שהם נתקלים בכמת "קיים", בוחר המוכיח את ערך המשתנה, ובכל פעם שהם נתקלים בכמת "לכל", בוחרת המתמטיקה. הבחירה של המוכיח יכולה להיות תלויה בכל הבחירות שביצעה המתמטיקה לפניו. עלינו להראות צורת בחירה עבור המוכיח כך שתמיד כשיגמרו הכמתים ויבחרו המשתנים כולם, תהא הטענה A נכונה. אם נצליח בכך הרי שברשותנו הוכחה ואנו שמחים.

מהסבר זה קל לראות ששני כמתים מאותו סוג דווקא מתחלפים ביניהם, וזאת משום שלא נוסף לנו מידע לאחר שקבענו אחד על קביעת השני.

דוגמה: נתון הפסוק: 

נכתוב אותו במילים, נכתוב את שלילתו בסימנים ובמילים. אח"כ נוכיח או נפריך אותו.

נדגיש שהבחירה של y היא כתלות ב-x, ואכן אפשר לבחור y=-x-1 ולקבל פסוק אמת.

אסור לבחור את z כי הדבר צריך להיות נכון לכל האפשרויות. בנוסף אסור לבחור את y כתלות ב**z**.

הרחבת הדוגמה:

 - פסוק אמת

 שקר

אמת.

**תרגיל:** הצרן / כתוב במילים. לאחר מכן הוכח או הפרך:

1. לכל מספר טבעי קיים מספר טבעי גדול ממנו שמתחלק ב-3.
2. קיים מספר טבעי, כך שכל מספר טבעי גדול ממנו מתחלק ב-3.
3. קיים מספר ממשי, כך שהכפל שלו בכל מספר ממשי אחר יתן תמיד אותה תוצאה. (אמת, זהו 0)



1.  (אמת, אלה הם a=b=1 או a=b=0 או a=b=x).
2.  (אמת)

**יישום**

לאחר שנתוודענו לכמתים באה העת לתרגיל את השימוש בהם. לצורך כך נרשום מערכת אקסיומות שתתאר מספרים שלמים, חיבור, כפל ומספרים רציונלים, וננסה להוכיח טענות לגבי אובייקטים אלו באופן פורמלי. נזכיר כי את סימן ה= איננו מגדירים מחדש והוא אומר בפשטות ששני אובייקטים הם זהים על כל המשתמע מכך.

סימנים: -,+,>,/,∙,|,0,1, a טבעי, a שלם, a רציונלי, R קבוצת המספרים הממשיים (עליה נכמת).

כמו כן נשמיט סימני כפל בין משתנים ונשתמש בקיצורים: b≥a במקום (b>a וגם b=a)

 במקום x טבעי, במקום x שלם,  במקום x רציונלי, ו- במקום ממשי.

על הסימון האחרון נחשוב כפרדיקטים חד-מקומיים שמחזירים אמת אם ורק אם a טבעי, שלם או רציונלי בהתאמה. ננסח את רוב האקסיומות לקבוצה מסויימת, כגון השלמים, על אף שרבות מהן ניתן להכליל לכל המספרים הממשיים. יש עוד אקסיומות לגבי חילוק שלא ציינו כאן.

אקסיומות יסוד:

1. 1 הוא הטבעי המינימלי.

**תרגיל 2.2: הצרן את אקסיומות 1...18 בשפה פורמלית.**

אקסיומות סדר (עבור טבעיים)

1. לכל שני מספרים שונים אחד מהם גדול מהשני.
2. אף מספר לא גדול מעצמו.

חיבור וכפל (עבור טבעיים ושלמים)

1. אם נחבר שני טבעיים נקבל מספר טבעי גדול יותר.
2. אם נכפיל שני טבעיים נקבל מספר טבעי גדול או שווה המתחלק בהם.
3. לכל שני טבעיים קיים מחלק משותף מכסימלי.
4. 0 נייטרלי לחיבור ו-1 נייטרלי לכפל.
5. חיבור הוא חילופי.
6. כפל הוא חילופי.
7. חיבור הוא קיבוצי.
8. כפל הוא קיבוצי.
9. כפל מתפלג מעל חיבור.

חיסור (עבור שלמים)

1. לכל מספר שלם קיים נגדי לחיבור.
2. חיסור הוא חיבור עם הנגדי (מאקסיומה 13).
3. מספר רציונלי הוא שלם אם ורק אם מתקיים אחד הבאים: הוא טבעי, או הנגדי שלו לחיבור טבעי, או שהוא 0.

חילוק (עבור רציונלים)

1. לכל מספר רציונלי שונה מאפס קיים הופכי לכפל.
2. חילוק הוא כפל בהופכי (מאקסיומה 16).

**פתרון לתרגיל 2.2**

אקסיומות יסוד:

אקסיומות סדר

חיבור וכפל

1. 
2. ,

חיסור



חילוק – נשאיר לקורא.

**הוכחת אי רציונליות**

בחלק זה נוכיח טענה על מספרים רציונלים, בדומה לרמה של כתיבת הוכחות בכיתה. **שימו לב!** לא ננמק הכל מן האקסיומות, כיוון שדבר זה יעשה את ההוכחה למסורבלת. כדי להתמקד ב"לב ההוכחה", אנו משמטים הצדקות שנובעות מאקסיומות המספרים הבסיסיות.

טענה 1: לכל מספר רציונלי יש צורה מצומצמת*.* כלומר אם  אז קיימים מספרים שלמים  כך ש- וכן המחלק המשותף המקסימלי של  הוא 1.

הוכחה: יהי . מהגדרת רציונלים קיימים שלמים  כך ש- . לפי אקסיומה 6 קיים להם מחלק משותף מקסימלי, נסמנו ב-. כלומר, קיימים שלמים  כך ש-. כיוון ש- , ומתרגיל בית 1 (בו הוכחנו מאקסיומות דומות שבמכפלה ששווה אפס יש גורם שהוא אפס), נקבל ש-. נשים לב שהמחלק המשותף המקסימלי של הוא 1 (אחרת היה אפשר להגדיל את  בסתירה), וכן , אז סיימנו.



טענה 2:  הוא מספר אי-רציונלי.

הוכחה: נניח בשלילה שהטענה לא נכונה. אזי רציונלי. מטענה 1 קיימים כך ש- , וכן זרים. נעלה בריבוע ונקבל  או . מכאן נקבל כי .



*תת-טענה:* m זוגי. *הוכחת תת-טענה:* אחרת, הוא אי זוגי, ולכן גם הריבוע שלו אי-זוגי. סתירה.

לכן קיים מספר טבעי  כך ש-. נציב חזרה ונקבל  כלומר  ולכן . כלומר 2 מחלק משותף וזו סתירה.

**- דף תרגיל 3: כמתים -**

* 1. הצרן את הטענות הבאות. לאחר מכן הוכח או הפרך אותן.
     1. לכל מספר ממשי m, יש פתרון למשוואה כש-x מספר ממשי.
     2. לכל מספר ממשי x, יש פתרון למשוואה כש-m מספר ממשי.
     3. קיים מספר ממשי m, כך שלכל מספר ממשי x מתקיים .
     4. לכל מספר ממשי m, אין פתרון למשוואה כש-x מספר ממשי.
     5. לכל מספר חיובי m, לכל מספר ממשי x מתקיים .
  2. כתוב במילים את הטענות הבאות. לאחר מכן הוכח או הפרך אותן.

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
   1. כתוב את השלילה של הטענות הבאות. לאחר מכן הוכח או הפרך אותן:
      1. 
      2. 
      3. .
      4. **.**
   2. הצרן 3 טענות מתוך דף האקסיומות.
   3. הוכח כי אינו רציונלי.

**שיעור 4-א: שיעור לדוגמא על המספרים הממשיים**

**הקדמה**

שיעור זה, בניגוד לשיעור המודגם 4-ב, אינו נלמד בדרך כלל במסגרת הקורסים הבסיסיים של שנה ראשונה בפקולטה. הוא עוסק בבעיה שהיא בבסיס האנליזה: הגדרת המספרים הממשיים. באופן מפתיע, ההגדרה המדויקת שלהם והוכחת תכונותיהם דורשות מאמץ לוגי לא מבוטל.

בחרנו להביא נושא זה כאן כיוון שמדובר בנושא סגור, שמשלים את החומר שתלמדו בהמשך. בנוסף אין הוא דורש חומר רקע, ונוכל מהר מאוד להגיע לרמה התיאורטית הנדרשת מכם בשיעור רגיל. הבה נתחיל.

**מבוא קצרצר לקבוצות**

קבוצה היא אוסף, שמקיים אקסיומות שלא ניכנס אליהן (נקראות "אקסיומות Zormelo-Frenkel"). אם A קבוצה, אזי הסימון אומר ש- איבר ב-A, או שייך ל-A.

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר כמה מושגים:

***חיתוך:***  

***איחוד:*** 

***הפרש:*** (נקרא גם "המשלים של B ב-A").

***הכלה חלשה:*** אם . יתר על כן, אם

***שוויון***: אם .

***הכלה חזקה:*** אם .

**הגדרת חתכי דדיקנד**

כנקודת מוצא נניח שכולנו מכירים את הקבוצות (מספרים טבעיים) ו- (מספרים רציונלים). אנו יודעים כיצד לבצע פעולות של חיבור, חיסור, כפל, חילוק במספר שאינו אפס, לקיחת הופכי לחיבור ולכפל במספרים הרציונלים, וכמו כן – שהתוצאה תהא תמיד רציונלית.

הגדרה: **חתך דדיקנד** הוא קבוצה , , כך ש-



נסמן את אוסף כל החתכים ב-.

בתרגום חופשי למילים: התכונה הראשונה אומרת ש- היא "קרן" אינסופית לשמאל של רציונלים (אם מספר נמצא בקבוצה, כל המספרים תחתיו נמצאים). התכונה השניה אומרת שב-A אין איבר מכסימלי, אין איבר שגדול מכל איבר אחר בקבוצה (כלומר, לכל איבר יש איבר גדול ממנו בקבוצה).

החתך למעשה מייצג עבורנו מספר ממשי. נראה זאת ביתר בהירות בהמשך.

**החתך המתאים למספר רציונלי** הוא .

תרגיל: הוכיחו כי היא אכן חתך, וכי לכל התאמנו חתך שונה (ראשית הצרינו טענה זו).

שימו לב! לא כל חתך מתאים למספר רציונלי.

דוגמא: הוכיחו כי הקבוצה היא חתך, אך אינה מתאימה לאף מספר רציונלי.

דוגמא נוספת: קבוצת הרציונלים הקטנים מהיחס בין שטח עיגול לרדיוס בריבוע (זו הקבוצה שתתאים ל-).

**פעולת ההשוואה (תכונת הסדר)**

הגדרה: עבור שני חתכים *נאמר ש- אם (בדומה מגדירים אי-שוויון חלש).*

תרגיל: לכל מתקיים: .

למעשה ניתן להכליל טענה זו גם לחתכים אחרים:

טענה: ניתן להשוות בין כל שני חתכים שונים (כלומר, הגדרנו *סדר מלא*). מתמטית:

הוכחה: נניח שהתנאי מתקיים, דהיינו , אבל המסקנה לא מתקיימת, דהיינו

נתבונן באותם איברים שקיימים לפי צד ימין של השקילות (אותם ). מההגדרות, אלה מספרים רציונלים, שונים (אחרת מקבלים סתירה מידית), לכן מתכונות מספרים רציונלים: . *בלי הגבלת הכלליות* נניח כי . מאקסיומה ראשונה של חתך, נובע כי גם , וזו סתירה לבחירתו של .

**פעולת החיבור**

הגדרה: עבור שני חתכים נגדיר *פעולת* ***חיבור****:*

טענה: פעולת החיבור על חתכים מקיימת את התכונות הבאות:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **שם התכונה** | **טענה במילים** | **הצרנה** |
| סגירות | פעולת החיבור בין חתכים מניבה חתך |  |
| חילופיות (קומוטטיביות) | התוצאה של פעולת החיבור לא תלויה בסדר בין המחוברים. |  |
| קיבוציות (אסוציאטיביות) | בשרשור של פעולות חיבור, אין זה משנה איזה מהם לבצע קודם |  |
| קיום איבר ניטראלי | קיים חתך, למעשה זהו , שחיבור איתו אינו משפיע על המחובר השני. |  |
| קיום הופכי | לכל חתך יש חתך כך שסכומם יחד שווה לאיבר הניטראלי. |  |

*דרך אגב, מבנה שמקיים את כל התכונות הללו ביחס לפעולה, נקרא* חבורה חילופית. *(ללא החילופיות, זו פשוט* חבורה). *אתם תלמדו עוד על חבורות בקורס "אלגברה לינארית".*

*הוכחה: נדגים בכיתה הוכחה של רוב התכונות. נרשום כאן בסיכום הוכחה רק לחלק מהן.*

*סגירות: קודם כל מראים ש- היא תת קבוצה של הרציונלים, שאינה ריקה (להסביר!) ואינה כל הרציונלים (להסביר!). כעת, יש להראות את 2 התכונות של חתך.*

*(1) צ"ל:*

*אכן, כיוון ש-, מההגדרה של קבוצה זו,* יש כך ש-. ועכשיו  *וזה סכום של שני דברים: והמספר שקטן מ-. לפי תכונה ראשונה של חתך עבור B, איבר זה נמצא לכן ב-B בעצמו, ומכאן ש- נכתב כסכום כנדרש.*

*(2)* צ"ל:

יהי . כמו קודם, אפשר לכתוב , כש-. מתכונה (2) של חתך עבור A, קיים . בדומה קיים . נגדיר . זהו איבר ב-, הגדול מ- כנדרש.

*קיום נטרלי: מההגדרות, .* צריך להראות שזה שווה ל-.

יהי . מאקסיומה שניה של חתך, קיים . נגדיר . אזי

*.*

*בכיוון ההפוך, יהי* איבר בסכום, כלומר . *מכאן ש- ומאקסיומה* ראשונה של חתך נובע .

*קיום הופכי: נגדיר*

*נשים לב שמתקיים: . נשתמש בזה רבות בשורות הבאות.*

*קודם כל, נטען ש* ***היא חתך.*** *כדי להוכיח זאת יש להראות 3 דברים:*

* *.*

אם אז ממה ששמנו לב אליו, נקבל . יהי כעת כלשהו (יש כזה, כיוון ש-). נבחר , אזי כמובן אבל , סתירה!

*בדומה המקרה השני נפסל.*

*נצא מאגף שמאל. יודעים כי וגם , ולכן:*

*יהי . יודעים כי קיים כך ש- . בפרט*

*עכשיו נטען כי המספר הוא כנדרש. באמת, הוא גדול מ-, והוא נמצא ב , כי*

*עכשיו צריך להראות ש* ***היא הופכית לחיבור של*** *, כלומר שאכן . נראה שכל איבר בצד ימין נמצא בצד שמאל וההפך.*

*יהי , כלומר קיים וקיים כך ש-. אבל מההגדרה של נובע מיד כי כלומר .*

*מצד שני, יהי , כלומר . צריך להוכיח:*

*אבל מהתכונה הראשונה של חתך, די להוכיח*

*נניח בשלילה שזה לא מתקיים, כלומר:*

*זה גורר ש-*

*אבל, מכאן נובע כי*  (מדוע? יש כאן עוד שלב ושימוש בכך שזהו חתך!). וזה לא יתכן כי חתך.

**פעולת הכפל**

*הגדרה: לשני חתכים המכילים רק מספרים שליליים (כלומר, ) נגדיר*:

*לאחר מכן נרחיב את ההגדרה לקבוצות המכילות מספרים חיוביים, לפי הכללים:*

*ההגדרה טובה, כי אם חתך המכיל מספרים חיוביים, אז מכיל רק מספרים שליליים (בדקו זאת!).*

*מקיימת תכונות דומות, למעט קיום ההופכי אשר קיים לכל החתכים פרט לחתך האפס. תוכיחו זאת בשיעורי הבית.*

**המספרים הממשיים - תכונות מתקדמות**

*אחרי שראינו את כל התכונות הרצויות, נוכל לסמן מעתה שהוא הסימון הסטנדרטי של מספרים ממשיים. אם כך, מספר ממשי מבחינתנו הוא פשוט חתך דדיקנד.*

*מהי קבוצה של מספרים ממשיים? – זו קבוצה שכל איבריה הם חתכים, כלומר כל איבריה ב-. למשל קבוצת* כל המספרים הממשיים הקטנים מ-1 זו הקבוצה , שכמובן שונה מ- *.*

כך אפשר להגדיר קטעים, למשל: *.*

*בנוסף לקיום של סדר, פעולת חבור ופעולת כפל עם התכונות שמנינו, יש למספרים הממשיים תכונה מפתיעה:*

***טענה (תכונת השלמות):*** *לכל קבוצה של מספרים ממשיים, אשר חסומה מלמעלה, קיים חסם עליון טוב ביותר.*

*כדי להבין אותה צריך להגדיר את המושגים המשתתפים באופן מדויק. הגדרות אלה יופיעו גם בקורס חדו"א עצמו.*

*הגדרה: תהי קבוצה של מספרים ממשיים.*

*1. נאמר ש-* חסומה מלמעלה *אם . כל M כזה נקרא* חסם על S.

2. מספר נקרא *החסם העליון החסם העליון הטוב ביותר של* אם לכל חסם נוסף על הקבוצה *S, מתקיים .*

*הוכחת תכונת השלמות: תהי*  קבוצה של מספרים ממשיים, כלומר למעשה קבוצה של חתכים. נניח גם כי חסומה מלמעלה ע"י איזשהו מספר ממשי (כלומר חתך). נגדיר:

*נוכיח כעת כי: (1) הוא חתך, (2) חסם על S, (3) החסם הטוב ביותר.*

*(1) נובע מטענה כללית – איחוד של חתכים הוא חתך (ש"ב).*

*(2) אכן, כי לכל*  *מתקיים מהגדרת האיחוד כי או בשפה שקולה .*

*(3) נניח כי חסם נוסף על הקבוצה S. מהגדרה של חסם עליון, . ואז מההגדרה של איחוד , כלומר כנדרש.*

***טענה (צפיפות הרציונלים בממשיים):*** *בין כל שני מספרים ממשיים, קיים מספר רציונלי.*

*הצרנה:*

*הוכחה: יהיו . כיוון ש- הוא למעשה חתך, אזי הוא תת-קבוצה של רציונלים. כיוון שיש לנו הכלה ממש (שוב כקבוצות של רציונלים), אזי מהגדרת הכלה*

*וזה בדיוק אומר : וגם . אבל ראינו שכל שני חתכים ניתן להשוות, ומכאן נובע ש- וגם כנדרש.*

**- דף תרגיל 4א: חתכי דדיקנד –**

1. קבע לגבי הקבוצות הבאות האם הן חתך דדיקנד, והוכח טענתך מההגדרה.
2. הצרן את הטענות הבאות לגבי כפל בין חתכים, והוכח אותן.
3. (סגירות) תוצאת הכפל בין שני חתכים היא חתך.
4. (חילופיות) הסדר בין הגורמים לא משנה את התוצאה.
5. (קיבוציות) בשרשור של שתי פעולות כפל, אין זה משנה איזו מהן מתבצעת קודם.
6. (קיום איבר ניטראלי) החתך המתאים למספר ניטראלי לכפל.
7. (קיום הופכי – כמעט) לכל חתך שונה מחתך האפס קיים חתך הופכי לו לכפל.
8. הוכיחו (בעזרת חתכים) כי בין כל שני מספרים ממשיים יש מספר רציונלי. כלומר:
9. הוכיחו בעזרת חתכי דדיקנד כי:

כלומר, הראו כי לכל חתך כך ש- , מתקיים: .

1. הוכיחו כי איחוד של חתכים הוא חתך (איחוד כלשהו, אולי אינסופי).
2. את החיבור והכפל שהגדרנו בין חתכים אפשר להכליל לחיבור ולכפל בין קבוצות של מספרים ממשיים, דהיינו: עבור נגדיר

,

חשבו את תוצאת החיבור והכפל בין הקבוצות ו- .

**שיעור 4-ב: שיעור לדוגמא על קבוצות ופונקציות**

**פרק ראשון: קבוצות**

***קבוצה*** היא אוסף של איברים, המקיימת אקסיומות מסוימות (הקרויות Zormelo-Frenkel). האקסיומות נועדו להסדיר פדוקסים כגון פרדוקס ראסל: אוסף כל הקבוצות שלא מכילות את עצמן אינו יכול להיות קבוצה. אנו נתעלם מסוגיות אלו, ונסתפק במונח האינטואיטיבי. תגעו בכך יותר בקורס "תורת הקבוצות".

תכונה: קבוצה אינה סדורה, ואינה סופרת עותקים. לדוגמה: 

קבוצות הן לאו דווקא של מספרים, למשל: כל הרהיטים בחדר, או כל המילים בעברית.

***שייכות:*** קבוצה מכילה איברים. אם איבר  שייך לקבוצה A, נסמן: . למשל .

ניתן להגדיר קבוצה ע"י תנאי, בעזרת הסימן " | " או " : " כך: .

***קבוצות חשובות****:* טבעיים, שלמים, רציונלים, ממשיים.

קטעים ממשיים וקרניים, למשל:  .

***הקבוצה הריקה*** לא מכילה אף איבר.

**הכלת קבוצות ושיויון קבוצות**

הגדרה: תהיינה A ו-B קבוצות. נאמר ש-A מוכלת ב-B, או ש-A תת-קבוצה של B, אם"ם כל איבר של A הוא גם איבר של B. נסמן: . (תרגילון: לכתוב בשפה מתמטית.)

נאמר ש-A ו-B שוות, ונסמן , אם"ם מתקיים וגם .

טענה: A ו-B מכילות את אותם איברים.

הוכחה: נצרין את אגף שמאל: . מקבלים בדיוק את ההגדרה של הכלה דו-כוונית, כלומר את אגף ימין.

אם וגם , אז נסמן , ונאמר ש-A *מוכלת ממש (או מוכלת חזק)* ב-B.

דוגמה: . הראו שההכלות אינן שויון (כלומר זו הכלה ממש).

טענה: לכל קבוצה A מתקיים .

הוכחה: תהי A קבוצה כלשהי.  שקול לטענה  או . כיוון שהתנאי לעולם לא מתקיים, הטענה היא מסוג  ולכן היא נכונה.

תרגיל: נגדיר קבוצה .

1. מה מהבאים נכון:

א. , ב. , ג.  ד. , ה. , ו. , ז. 

2. מהו הסימן המתאים ב-: , .

שימו לב! בתרגיל האחרון סעיפים ב',ה' של שאלה 1 היו למעשה חסרי משמעות, כי משני צידי הסימן  צריכות לבוא *קבוצות*. "1" אינו קבוצה כי אם איבר, ואילו "{1}" היא קבוצה המכילה רק את האיבר 1. על כן –

אבחנה:   .

משפט (סכום תכונות ההכלה): תהיינה  קבוצות כלשהן. אזי:

1.  (רפלקסיביות)
2.  (טרנזיטיביות)
3.  (אנטי-סימטריות)

תכונה 3 היא למעשה ההגדרה, אך חזרנו עליה כאן בשביל להדגיש את הדמיון בין הסמנים  בין קבוצות ו-  בין מספרים.

הוכחה: תכונה 1 – מתקיימת, כי היא שקולה לטענה "כל איבר של A הוא איבר של A".

בתכונה 2, נניח כי התנאי הוא T ונוכיח כי המסקנה היא בהכרח T. התנאי (הוא "הנתון") אומר שני דברים: (א) , (ב) .

עלינו להוכיח כי . על-כן ***יהי*** . מתנאי (א) נובע ש-, ואז ניתן להשתמש בתנאי (ב) ולקבל ש- כנדרש.

תרגיל: תהיינה Q,P,R קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

1. 
2. 

פתרון: טענה 1 ו-2 לא נכונות, ע"י הדוגמה: . ב-R יש רק איבר אחד והוא אינו שווה לקבוצה P, וכן יש לו רק תת-קבוצה אחת מלבד הקבוצה הריקה, וגם היא לא שווה ל-P.

**פעולות על קבוצות**

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר בעזרתן כמה קבוצות חדשות (ללוות בדיאגרמה):

***חיתוך:***  

***איחוד:*** 

***הפרש:*** 

***הפרש סימטרי:*** 

דוגמה 1: חשבו את כל הפעולות הנ"ל עבור הקבוצות A= כל המספרים הראשוניים, ו-B=כל המספרים הזוגיים.

דוגמה 2: חשבו את כל הפעולות הנ"ל כאשר  ו-A קבוצה כלשהי.

A, B נקראות ***זרות*** אם"ם , כלומר אין להם אף איבר משותף. (השתכנעו שזה אכן נובע מההגדרות!) לדוגמה, כל קבוצה זרה לקבוצה הריקה.

במובנים רבים הפעולות  ו- בין קבוצות דומות לפעולות  ו- בין פסוקים. כבר בהגדרה ניתן לראות זאת (ועל כן סימונם הדומה). הדמיון מתחזק לאור המשפט הבא:

משפט (חוקי חיתוך ואחוד):

1. חוק החילוף: , .
2. חוק הקיבוץ: , ובדומה גם לאיחוד.
3. חוק הפילוג: 



הוכחה של חוק הפילוג הראשון: עלינו להוכיח הכלה דו-כוונית.

יהי . אזי מהגדרת האחוד, . מהגדרת חיתוך, . מכאן (לפי תחשיב פסוקים וטבלאות אמת, וגם לפי ההגיון הבריא) , שזה שקול לפי הגדרה ל- . הכיוון השני מאוד דומה (למעשה טבלת האמת מראה מיד שקילות).

***סימונים מקוצרים***לפעולות על מספר רב של קבוצות:  - זו קבוצה של קבוצות כשרצים על אינדקס מ-. נקצר את חיתוך כל הקבוצות הללו ל- ואת האיחוד ל-. הסימון לא בעייתי כי הסדר אינו משנה, לפי חוק החילוף. לעומת זאת אין סימון מקוצר לפעולה שדורשת גם איחוד וגם חיתוך.

***משלים ביחס לקבוצה:*** תהי  קבוצה שתכונה "הקבוצה האוניברסלית", ותהי . המשלים של  (ביחס לקבוצה ) הוא הקבוצה , והוא יסומן ע"י  או .

הסימון האחרון מניח שכולנו יודעים מהי הקבוצה האוניברסאלית, זהו בסך הכל קיצור של הפרש קבוצות.

תרגיל: תהי . אזי: (א) , (ב) , (ג) .

שאלה: לאיזו פעולה בין פסוקים מקבילה פעולת המשלים בין קבוצות?

תשובה: זוהי *פעולת השלילה*. שכן, המשלים של קבוצה מכיל את כל מה שאינו בקבוצה (מתוך ), כלומר: . ההקבלה נהיית חריפה יותר לאור המשפט הבא, שראינו כבר את מקבילו לפסוקים.

משפט (חוקי דה-מורגן): תהיינה  קבוצות. אז:

1. 
2. 

תרגיל 1: הוכיחו את חוקי דה-מורגן (למשל את הראשון), ע"י הכלה דו-כוונית.

תרגיל 2: נסחו והוכיחו חוקי דה-מורגן עבור קבוצת קבוצות .

**פרק שני: פונקציות**

הגדרה: פונקציה  היא התאמה של כל איבר  בקבוצה  לאיבר יחיד בקבוצה , שנסמנו . הקבוצה  נקראת ***התחום*** של הפונקציה, ***הטווח*** שלה הוא . ***התמונה*** שלה זו קבוצת כל האיברים ב- שיש להם מקור המותאם להם, כלומר: .

כמובן שהתמונה חלקית לטווח:  , אבל לא תמיד יש שויון.

הפרבולה  מגדירה התאמה מ-x ל-y, אך לא ההפך.

דוגמה: *פונקצית אינדיקטור* של קבוצה  המוגדרת על קבוצה אוניברסאלית  היא הפונקציה הבאה: .

*פונקצית הזהות* על קבוצה  היא הפונקציה  המתאימה כל איבר לעצמו: .

הגדרה: שתי פונקציות  הן ***שוות*** או ***שקולות*** אם . במקרה כזה מסמנים .

שימו לב להבדל בין הפסוק  לבין הפסוק : הפסוק השני תלוי בערכו של , ויתכן שיתקיים לחלק מן האיברים בתחום (למשל שתי פונקציות לינאריות יכולות להחתך בנקודה אחת, בה יש שויון כזה, אך הן לא שקולות). הפסוק הראשון אומר שיש שויון *לכל* הנקודות בתחום.

**תכונות של פונקציות**

תהי  פונקציה. נגדיר את התכונות הבאות:

 ***חד-חד-ערכית*** אם: . או, באופן שקול,

 ***על*** אם: 

תרגילון: פונקציה היא חח"ע אם"ם לכל איבר בתמונה קיים איבר יחיד מהתחום שמותאם לו. פונקציה היא תמיד על התמונה שלה. (המושגים תלויים מאוד בתחום ובטווח!)

תרגיל: האם הפונקציות  הבאות חח"ע, על? הוכח תשובתך.

אם אחת התכונות לא מתקיימת, כיצד נשנה את התחום / הטווח כך שתתקיים?

(1) , (2) , (3) .

בצורה אינטואיטיבית, כדי להפוך פונקציה לעל יש לצמצם את הטווח שלה להיות . כדי להפוך פונקציה לחח"ע יש לצמצם את התחום שלה ע"י "מחיקה" של איברים שמקבלים ערך שכבר התקבל.

תהיינה  ו- שתי פונקציות, כך שהטווח של האחת הוא התחום של השניה. נגדיר את פונקצית ***ההרכבה*** ע"י: .

דוגמה: נתונות הפונקציות מ- ל- המוגדרות ע"י: , . כתבו את  ואת , והראו כי .

הרכבה היא אסוציאטיבית, כלומר יש לה *חוק קיבוץ:* (תרגילון: להוכיח!)

לעיתים נקצר את סימון ההרכבה כאשר הפונקציה *החיצונית* היא פונקציה ידועה, למשל:  מוגדרת ע"י  (אם הפונקציה של העלאה בריבוע מוגדרת על הטווח).

שאלה: נתונה . האם ? מהו התנאי הדרוש לכך?

הפונקציה  ***הפיכה*** אם קיימת פונקציה  כך ש- ו-. במקרה כזה נסמן  ונכנה אותה הפונקציה ***ההופכית*** של .

ניתן לסמן אותה כך לפי הטענה הבאה:

טענה: הפונקציה ההופכית היא יחידה.

הוכחה: נניח שיש שתי פונקציות  שמקיימות את שני התנאים בהגדרה. יש להוכיח שהן שקולות. על כן יהי . נקבל:  ולכן .

השאלה "לאילו ערכי  ממשיים מתקיים " היא למעשה זו: "באיזה תחום חלקי לממשיים הפונקציה של העלאה בריבוע היא הפיכה?" הנה משפט שיעזור לנו לענות על כל השאלות מצורה זו.

משפט קיום פונקציה הופכית:  הפיכה   חח"ע ועל.

הוכחה: נניח את אגף ימין, כלומר ש הפיכה. נראה כי  על. יהי , צריך להראות שיש לו מקור. אכן,  מוגדר ומקיים:  לפי הגדרת פונקציה הופכית. כעת נראה ש- חח"ע. נניח כי , ויש להוכיח כי . ע"י הפעלת  על אגפי המשוואה נקבל זאת.

בכיוון שני, נניח את אגף שמאל. יש לבנות פונקציה הופכית. יהי . כיוון ש- על, קיים איבר  כך ש-. כיוון ש- חח"ע, זהו איבר יחיד (כל איבר אחר  כך ש- מקיים ). לכן ההתאמה  היא פונקציה. בודקים בקלות שהיא הופכית.

דוגמה: הפונקציה  המוגדרת בין  היא הפיכה.

פונקציה לינארית  מהממשיים לעצמם היא הפיכה אמ"מ .

תרגיל: הוכיחו כי הרכבה של פונקציות חח"ע היא חח"ע, וכן הרכבה של פונקציות על היא על. הסיקו שהרכבה של פונקציות הפיכות היא הפיכה.

תרגיל: ההופכית של הרכבה של פונקציות הפיכות נתונה ע"י הנוסחא: .

**פרק שלישי: פונקציות מיוחדות על הממשיים**

בפרק זה תמיד נתייחס לתחום ולטווח ממשי: .

פונקציה תקרא ***מונוטונית עולה ב*** אם לכל  כך ש-  מתקיים . פונקציה כזו ***עולה ממש (חזק) ב*** אם לכל  כך ש- מתקיים .

בדומה נגדיר פונקציה מונוטונית יורדת. אם לא רוצים להגיד באיזה כיוון, אומרים פשוט "מונוטונית".

**כלל:** פונקציה מונוטונית עולה שומרת אי-שויון, פונקציה מונוטוניות יורדת הופכת אי-שויון.

דוגמה: הפונקציה  היא מונוטוניות עולה ממש בכל . הפונקציה  יורדת ממש על  ועולה ממש ב-.

הפונקציה הקבועה היא גם עולה וגם יורדת (חלש). אינדיקטור של קטע היא לא מונוטונית על כל הישר (אך כן עולה ויורדת בתת-תחומים מסוימים של הישר).

פונקצית האינדיקטור של הרציונלים אינה עולה ואינה יורדת באף תחום.

**שימוש חשוב בכלל:** הפונקציה של הכפלה בקבוע  מונ' עולה ממש כאשר  ויורדת ממש כאשר , בהתאם נדע להפעיל אותה על אי-שויון. הכפלה ב-0 תהפוך כל אי שויון לשויון ולא תשמר אותו.

טענה: פונקציה מונוטונית ממש היא חח"ע.

הוכחה: **בלי הגבלת הכלליות** נניח שהפונקציה מונוטונית עולה.

נניח בשלילה שקיימים  כך ש-  אבל . נובע כי  או . **בלי הגבלת הכלליות** נניח ש-. אז ממונוטוניות ממש נקבל , וזו סתירה להנחה. על כן סיימנו.

חשוב להבין את הרעיון של "בלי הגבלת הכלליות" שהודגם כאן פעמיים: אין צורך לכתוב את שאר מקרי ההוכחה, כי הם זהים לחלוטין מבחינת כל הטיעונים הלוגיים. במקום לעשות "גזור-הדבק" כותבים ביטוי זה. **יש להשמר מאוד משימוש בו כאשר המקרים שונים!**

**שתי דוגמאות חשובות לפונקציות על ממשיים:**

1. פונקציה מעריכית , כאשר .

זו פונקציה מונטונית עולה ממש אם , קבועה אם  ויורדת ממש אם  ההופכית שלה (במקרה ש- היא , והיא מונטונית באותו כיוון (תרגיל בית – זה נכון באופן כללי).

1. פונקציות טריגונומטריות: למשל  אינה הפיכה בכל התחום, אלא רק אם נצטמצם לקטע בו היא מונוטונית, למשל .

**- דף תרגיל 4ב -**

1. עבור הקבוצות  חשבו את הקבוצות הבאות (משלים נלקח ב-): .
2. תהיינה A,B,C קבוצות. הוכיחו את הטענות הבאות :
   1. .
   2. .
   3. .
   4. .
3. הפריכו את הטענות הבאות באמצעות דוגמא נגדית, וציירו דיאגרמת וון להמחשה.
   1.  (שימו לב, כאן יש הכלה ממש).
   2. .
   3. .
   4. .
4. תהיינה Q,P,R קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
   1. 
   2. 
5. לכל אחת מהפונקציות הבאות קבעו האם היא חד-חד-ערכית והאם היא על. אם היא אינה על, מצאו את  :
   1.  מוגדרת ע"י : .
   2.  מוגדרת ע"י : .
6. תהיינה  פונקציות, הוכיחו כי :
   1. אם  חח"ע ועל, אז  על ו-  חח"ע.
   2. אם  על ו-  חח"ע, אז  על.
   3.  אם"ם  ולכל  מתקיים .
7. מצאו פונקציות חד-חד-ערכיות ועל:
   1. מ-  על .
   2. מ-  על .
8. תהיינה , ותהי  פונקציה מונוטונית הפיכה.
   1. הוכיחו כי  היא מונוטונית ממש.
   2. הוכיחו שגם  מונוטונית, ובאותו כיוון כמו .
9. האם הרכבה של פונקציות מונוטוניות היא בהכרח מונוטונית?

**נספח: עוד על נושאי תיכון**

**פרק 1: פונקציות טריגונומטריות**

בפרק זה נמדוד זוויות באמצעות רדיאנים. זווית בגודל רדיאן אחד הינה זווית שהקשת המתאימה לה במעגל מרדיוס  היא מאורך . היות והיקף מעגל הוא , נקבל כי במעגל ישנם  רדיאנים.









חשוב לזכור את ההמרות הבאות : .

נתבונן במעגל היחידה, זהו מעגל מרדיוס  שמרכזו בראשית הצירים.

נתבונן בנק'  שנמצאת על המעגל, ונחברה אל ראשית הצירים באמצעות רדיוס.









לזווית  שנוצרה בין ציר ה-  לבין הרדיוס נתאים את הערכים הבאים : .









ובאופן כללי, בהנתן משולש ישר-זווית, נקבל כי : .

נעבור על כמה זהויות בסיסיות :

* אם ניקח רדיוס במעגל ונסובבו סיבוב שלם, כלומר נוסיף לזווית שבינו לבין ציר ה- עוד  רדיאנים, נחזור בדיוק לנקודה ממנה יצאנו. לכן לכל  שלם מתקיים : .







* נשים לב כי הזווית  הינה הזווית בין ציר ה-  לבין הרדיוס, ואילו הזווית  הינה הזווית שבין הרדיוס לבין ציר ה- . ואז, כפי שניתן לראות בשרטוט נקבל כי : .









* אם ניקח את שיקוף הזווית  ביחס לציר ה- , נקבל כי : .
* באופן דומה, אם נשקף את הזווית  ביחס לציר ה- , נקבל כי : .





* ממשפט פיתגורס נקבל כי :  לכל זווית .









נצייר **גרף** של כל אחת מהפונקציות.

תרגיל: באילו קטעים הן מונוטוניות? איפה מוגדרות ?

**נוסחאות שימושיות** – פתחו דף ויקיפדיה הנקרא trig ident (גם הדף trig functions מומלץ על מנת להזכר בתיאוריה). אין צורך לזכור הכל בעל-פה! רוב הנוסחאות נובעות מהכללים שלמדנו ומזוג הנוסחאות הבא (אותו כן רצוי לזכור):



.

מכאן ניתן לקבל נוסחאות לזוית כפולה או חצי-זוית, למשל: .

נזכיר באותה הזדמנות עוד 2 חוקים גיאומטריים:

חוק הסינוסים במשולש: 

חוק הקוסינוסים במשולש: 

תרגיל: פשטו את הביטויים:

(1)  (2) , (3) 

פתרון: ב (1) מקבלים . ב(2) נציב בנוסחת הסכום של קוסינוס , לקבלת: ולכן . ב-(3) נחבר את נוסחאות של ונקבל פעמיים את הביטוי הרצוי.

**פרק שני: אי-שוויונות**

כאשר עלינו לפתור אי-שוויון נפעל לפי סדר הפעולות הבא :

1. נמצא את **תחום ההגדרה**, כלומר נמצא אלו ערכים ניתן להציב במשתנה שבאי-השוויון. למשל בביטוי  תחום ההגדרה יהיה , ובביטוי  תחום ההגדרה יהיה .
2. **נפשט** את הביטויים שמופיעים בכל אחד מהאגפים, למשל אם נתון לנו אי-השוויון  נוכל לפשט באופן הבא :  או . **בייחוד הכוונה לערך מוחלט.**
3. הפעלת **פונקציה מונוטונית ממש** כדי לבודד את המשתנה. אם עולה – נשאיר את א"ש, אם יורדת – נהפוך.
   * חיבור או חיסור של ביטוי כלשהו לכל אגפי אי-השוויון.
   * כפל במספר חיובי – משאיר, כפל בשלילי – הופך. כפל באפס – אסור.

יש לשים לב כי לא כל פעולה ניתן לבצע, למשל : , אבל , ולכן במקרה הכללי העלאה בריבוע אסורה.

תרגיל 1 : פתרו את אי-השוויון הבא : .

פתרון : ראשית נמצא מהו תחום ההגדרה. נשים לב שהמכנה של השבר  מתאפס עבור , ולכן תחום ההגדרה יהיה .

כעת נפשט את הביטוי . ע"מ לעשות זאת נצטרך לברר האם  חיובי או שלילי. נשים לב כי מנה זו תלויה בסימניהם של  ושל , ואומנם :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  | לא מוגדר |  |  |  |  |

כלומר, כאשר  או , עלינו לפתור את אי-השוויון , ואילו עבור , עלינו לפתור את אי-השוויון .

במקרה בו **** נקבל **** וכבר ראינו מקודם כי **** אינו נכלל בתחום ההגדרה.

נפתור את המקרים השונים :

1. אם  עלינו לפתור את אי-השוויון .

נכפול במכנה  (אין צורך להפוך את כיוון אי-השוויון, כי ), ונקבל :

.

אי-השוויון הזה הינו בעצם צורה מקוצרת לרשום :

 וגם .

נפתור את אי-השוויונות :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | וגם |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

קיבלנו כי אם , אז אי-השוויון מתקיים עבור . כלומר בתחום  אי-השוויון מתקיים.

1. אם  עלינו לפתור את אי-השוויון .

שוב, נכפול במכנה  (כאן צריך להפוך את כיוון אי-השוויון, כי ), ונקבל :

.

נפתור :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | וגם |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

קיבלנו כי אם , אז אי-השוויון מתקיים עבור . כלומר בתחום  אי-השוויון מתקיים.

1. אם  עלינו לפתור את אי-השוויון .

נשים לב כי . אם נחלק את שני אגפי אי-השוויון בביטוי  נקבל כי :  (כאן הפכנו את כיוון אי-השוויון, כי ).

כמו-כן, ראינו גם כי בתחום זה , ומכאן כי , ואי-השוויון אינו מתקיים בתחום זה.

לסיכום, קיבלנו כי אי-השוויון מתקיים עבור  או .

נבדוק את הפתרון שקיבלנו ע"י הצבה :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |  | |
|  | | |  | | |  | | |  | | |  | | |  | |
|  |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |  | |  |

לצורך התרגיל הבא נזכר **בפתרון של משוואה ריבועית** :

, כאשר . ניזכר מהי פרבולה צוחקת / בוכה, ואיך יודעים את כמות הפתרונות (0, 1, 2, אינסוף).

תרגיל 2 : מצאו עבור אילו ערכים של , לכל ערך של  מתקיים .

פתרון : זוהי פונק' ריבועית עם , ואנו מעוניינים לדעת מתי הפונק' היא תמיד חיובית.

קל לראות מהטבלה כי הפונק' יכולה להיות חיובית תמיד רק אם היא פונק' קבועה הגדולה או שווה לאפס, כלומר  ו- , או לחילופין אם היא פונק' ריבועית עם שורש אחד או ללא אף שורש כאשר .

נבדוק את שני המקרים :

1.  ו- 

כאן צריך להתקיים : .

אך ודאי כי לא ייתכן מצב בו  וגם , לכן מקרה זה אינו אפשרי לאף ערך של .

1.  ו- 

כאן צריך להתקיים : .

ערך מוחלט מחזיר ערך חיובי ממש לכל מספר שונה מאפס, לכן  עבור , כלומר .

נברר מתי התנאי השני מתקיים : .

אם  אז , לכן :



אנו רוצים למצוא מתי , כלומר : .

קיבלנו משוואה ריבועית חדשה עם , ועבורה נקבל :

,

לכן שורשיה יהיו : .

נשים לב כי , ולכן אי-השוויון  יתקיים עבור .

קיבלנו כי  וגם , לכן עבור  הביטוי חיובי לכל .

אם  אז  ואז נקבל כי :

,

לכן, .

קיבלנו כי  וכי , אך לא קיים ערך שמקיים את שני התנאים האלו.

לסיכום, הביטוי  הינו חיובי לכל  כאשר .

נבדוק את הפתרון שקיבלנו ע"י הצבה :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| עבור | לכל | לכל | לכל | עבור |

תרגיל 3 (א"ש הנובעים מתכונות פונקציות): לאילו ערכי x ממשיים מתקיים:

א. ****

ב. ****, ****.

ג. ****

ד. ****

**פרק שלישי: סדרות**

סדרה  נקראת ***חשבונית*** אם קיים  כך ש:  לכל . במקרה זה איבר כללי בסדרה יהיה מהצורה , וסכום  האיברים הראשונים של הסדרה יהיה

.

סדרה  נקראת ***הנדסית*** אם קיים  כך ש: לכל . במקרה זה איבר כללי בסדרה יהיה מהצורה , וסכום  האיברים הראשונים של הסדרה יהיה .

תרגיל 1 (חשבוני): נתונה סדרה  בה סכומם של  האיברים הראשונים הוא . הראו כי זוהי סדרה חשבונית, ומצאו למה שווה האיבר העשירי בסדרה.

פתרון : נשים לב כי ההפרש בין סכום  האיברים הראשונים לסכום  האיברים הראשונים שווה בדיוק לאיבר ה- -י, כלומר : . לכן :

.

ומכאן כי : , כלומר ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע ושווה ל- , ומכאן כי הסדרה אומנם סדרה חשבונית.

בסעיף הקודם ראינו כי  ולכן .

תרגיל 2 (הנדסי) : יהיו   האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.

1. הוכיחו כי גם  הינה סדרה הנדסית.
2. נסמן:  ו- . הוכיחו כי : .

פתרון :

1. לפי הנתון קיים  כך שלכל  מתקיים : .

לכן : .

כלומר היחס בין כל זוג איברים עוקבים קבוע, ולכן הסדרה  הינה גם כן סדרה הנדסית.

1. נזכור כי : , לכן :

.

כלומר : .

**- דף תרגיל לנספח: טריגונומטריה, אי-שוויונות, סדרות -**

1. הוכיחו את הזהויות הבאות מתוך זהויות הבסיס:
   1. 
   2. 
   3. .
2. פתרו את אי השוויונות הבאים:

א. ****

ב. ****

ג. ****

ד. ****

ה. ****

ו. ****

ז. ****

1. הוכיחו כי לכל מספר ממשי **** מתקיים: ****, ואפיינו מתי מתקיים השוויון. (האם תוכלו לתת הסבר גיאומטרי?)
2. הוכיחו כי לכל שני מספרים ממשיים  מתקיים: **.**
3. סדרה מוגדרת על ידי כלל נסיגה: a1=6, ו- an+1 = 3an – 8 עבור n≥1.  
   א. הוכיחו כי הסדרה המוגדרת ע"י הכלל: bn = an - 4 היא סדרה הנדסית.  
   ב. מצאו נוסחא ל- an.  
   ג. הוכיחו כי סכום 2n האיברים הראשונים עם סימנים מתחלפים

a1-a2+a3-a4+…+a2n-1-a2n שווה ל- (1-32n)/2.

**לבסוף...**

אם אתם מוצאים שגיאה בסיכומים הנ"ל, אנא כתבו לנו:

אוהד פלדהיים [ohad\_f@netvision.net.il](mailto:ohad_f@netvision.net.il)

נעמי פלדהיים [trinomi@gmail.com](mailto:trinomi@gmail.com)

שנה טובה ובהצלחה בתואר !