

# مقدمة للمنطق في الرياضيات



بروفيسور إيلون سولين

مدرسة علوم الرياضيات  
جامعة تل أبيب

# مقدمة للمنطق في الرياضيات



بروفيسور إيلون سولين

مدرسة علوم الرياضيات  
 جامعة تل أبيب

# مقدمة للمنطق في الرياضيات

كتابة: بروفيسور أيلون سولن - مدرسة العلوم الرياضية في جامعة تل أبيب  
مدير المشروع يستحق المعرفة: بروفيسور أيلون سولن  
تحرير لغوي: إباد معلوف  
ترجمة من العبرية إلى العربية: فائنة مرجية، وزارة التربية والتعليم  
مركزتان إداريتان: غاليت هرتسبيرغ ودانا طوطمان  
تصميم بياني وترتيب الصفحات: نيتسان-شمير معاتسيفيم  
رسوم توضيحية: ميرال جولدنبيرغ  
رسمة الغلاف: shutterstock  
عنوان موقع يستحق المعرفة: [goodtoknow.tau.ac.il](http://goodtoknow.tau.ac.il)  
صور: ويكيبيديا

شكر وتقدير  
نشكر طلاب صفوف السابع 4 والثامن 4 من فوج 2016-2017 في اعدادية "شموئيل هنجيد" في هرتسليا و"نعمي مارنك" من مدرسة أورط بن يمين ، الذين تعلموا في الكراس وشاركوا بملاحظات ساعدت في تحسينه . نتوجه بالشكر ، أيضا ، إلى المعلمتين "بتي كوهين" و"دافنه سبير" .

تُعتبر حقوق المنتجين وحقوقهم الأخلاقية محمية في المواد الواردة في هذا العمل .

يُسمح باستعمال الكراس ، وحفظهم في مخازن المعلومات ، ونشرهم لأهداف غير تجارية فقط . عند الحفظ في مخازن المعلومات ، يجب ذكر انتماء الكراس بشكل واضح لمشروع "من المفضل أن تعرف" ، وإضافة رابط لذلك في موقع المشروع . يُمنع استعمال المواد لأي هدف تجاري و/أو لإنتاج مواد مشتقة منها دون أخذ موافقة خطية واضحة من إدارة المشروع .

## المحتويات

|    |                              |
|----|------------------------------|
| 4  | مقدمة                        |
| 5  | 1 . القضية                   |
| 7  | 2 . روابط منطقية             |
| 12 | 3 . قيمة الصدق للقضية        |
| 15 | 4 . جداول الصدق              |
| 26 | 5 . تكافؤ القضايا            |
| 28 | 6 . قواعد الاستنتاج          |
| 37 | 7 . التعبيرات الكمية         |
| 49 | 8 . تلخيص                    |
| 50 | 9 . تلخيص المفاهيم والتعاريف |
| 51 | 10 . شخصيات ذكرت في الكراس   |
| 35 | 11 . حلول للتمارين           |

## مقدمة

اللوجوس، في اللغة اليونانية، هو التفكير السليم، ومعناه "سبب" أو "فكرة". ومن هنا، ينطوي المعنى على مفهوم "التفكير المنطقي" أي "تفكير منظم وسليم".

المنطق الرياضي هو مجال تطوّر لبحث سيرورة الاستنتاج، وهو ضروري بالنسبة لنا لأنّ اللغة المستعملة في عرض المنطق ليست لغة دقيقة. أحد الأمثلة لعدم الدقة في اللغة هو نظام الأولوية في العمليات الحسابية. لتوضيح المسألة، دعونا نتمعّن في التمرين الحسابي  $2+3 \times 4$ . إنّ عملية الضرب تسبق عملية الجمع، لذا فإنّ نتيجة التمرين هي 14.

وماذا عن هذه الحالة:

أخبرت المعلّمة طلاب الصف أنّها ستضيف تقييم "جيد جدًا" في شهادة العلامات فقط للطلاب الحاصلين على علامة 100 في الامتحان أو الحاصلين على علامة 100 في الوظيفة النهائية وأيضًا حفظوا إحدى القصائد التي تعلّموها في الصف عن ظهر قلب.

حصلت دينا على علامة 100 في الامتحان، وعلامة 90 في الوظيفة النهائية، ولكنها لم تحفظ قصيدة عن ظهر قلب. هل ستحصل على علامة جيد جدًا؟

يتعلّق الأمر بالأسبقية بين كلمات الرّبط "أو" و- "وأيضًا". سنستعين في الأقواس لنبيّن الأسبقية بين كلمات الرّبط، إذا كانت كلمة الرّبط "أو" تسبق كلمة الرّبط "وأيضًا"، نحصل على القاعدة التالية:

يحصل الطالب على تقييم جيد جدًا إذا (حصل على علامة 100 في الامتحان أو 100 في الوظيفة النهائية) وأيضًا حفظ قصيدة تعلّمها عن ظهر قلب.

حسب هذه القاعدة، يتعيّن على الطلاب تحقيق شرطين للحصول على علامة جيد جدًا، بحيث يكون أحد الشروط جفّظ القصيدة عن ظهر قلب. بما أنّ دينا لم تحفظ القصيدة عن ظهر قلب، فإنّها لن تحصل على تقييم جيد جدًا. إذا كانت، في المقابل، كلمة الرّبط "وأيضًا" تسبق كلمة الرّبط "أو"، فنحصل على القاعدة التالية:

يحصل الطالب على تقييم جيد جدًا إذا حصل في الامتحان على علامة 100 أو (حصل على علامة 100 في الوظيفة النهائية وحفظ غيبًا قصيدة تعلّمها في الصف).

حسب هذه القاعدة، يتعيّن على الطالب أن يحقق شرطًا واحدًا على الأقلّ من الشرطين للحصول على تقييم جيد جدًا في الشهادة. يبدو أنّ دينا تحقق الشرط الأوّل حيث حصلت فعلاً على علامة 100 في الامتحان، ولذلك ستحصل على تقييم جيد جدًا.

تمثّل الجمل الأربع التالية، وبصورة جيّدة، مشكلة إضافية:

أ. رأيت سفينة زرقاء.

ب. رأيت سفينة.

ت. رأيت جملاً.

ث. رأيت جملاً كاملاً.

من الواضح أنّه إذا كانت الجملة "أ" صحيحة فإنّ الجملة "ب" صحيحة، أيضًا. مع هذا، إذا كانت الجملة "ت" صحيحة، فهذا لا يعني بالضرورة أنّ الجملة "ث" صحيحة، كذلك. كيف يمكن التمييز بين هذين الحدين؟

الجملة الثلاث التالية تمثل مشكلة ثالثة في الاستنتاج:

أ. سيارتنا زرقاء.

ب. الأزرق لون.

ت. سيارتنا لون.

حتى لو كانت الجملتان "أ" و"ب" صحيحتان، الجملة "ت" غير صحيحة.

تبيّن الامثلة التي عرضناها أنّه لفهم كيف يتم الاستنتاج، فإنّ علينا تطوير لغة رسمية تعطي لكلّ جملة معنى واحداً، بحيث تكون الاستنتاجات التي يمكن التوصل إليها صحيحة. في هذه الكراسة، سنطوّر لغة تُدعى حساب القضايا، سنرى كيف نبني بواسطتها جملاً وكيف نحدّد معانيها. يمكن إيجاد جذور اللغة في أعمال الفلاسفة اليونانيين ارسطو (322-384 قبل الميلاد) وكريسيبوس (502-082 قبل الميلاد) وفي أعمال متأخرة أكثر للفيلسوف الفرنسي بيير ألبيرد (1079-1142). يمكنكم القراءة حول العلماء ارسطو، وكريسيبوس وبيير ألبيرد في الصفحة 55.

لغة حساب القضايا مكوّنة من ثلاثة أنواع من الأحرف: قضايا نواتية (أساسية)، وروابط منطقيّة، وأقواس. نبدأ استعراض اللغة بمصطلح القضية.

## 1. القضية

المصطلح الأساس في لغة حساب القضايا هو "قضية".

القضية هي تصريح يُظهر واقعاً يمكن أن يكون صحيحاً أو غير صحيح.

نحن معنيّون في تطوير لغة دقيقة يمكن من خلالها ترجمة وتفسير الجمل بطريقة واحدة فقط، وسنتطرق في ذلك إلى الجمل التي يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. يردّ فيما يأتي عددٌ من أمثلة تضمّ قضايا مختلفة:

1 اليوم يوم الاثنين.

2 يوجد لديّ بنطلون أسود.

3 لا يوجد لديّ بنطلون أسود.

4 تشرق الشمس في الشرق وتغرب في الغرب.

5 معدّل البُعد بين الكرة الأرضيّة والقمر هو 1000000 كم.

6 في سنة 2100، ستكون كلّ دول العالم متّحدة في إمبراطورية واحدة.

كلّ واحدةٍ من الجمل المسجّلة أعلاه هي تصريح يمكن أن يكون صحيحاً أو غير صحيح.

قضية "اليوم يوم الاثنين" هي قضية صحيحة ليوم واحد في الأسبوع وليست صحيحةً لستة أيام في الأسبوع. القضيتان "يوجد لديّ بنطلون أسود" و "لا يوجد لديّ بنطلون أسود" يمكن أن تكون كلّ منهما صحيحة أو غير صحيحة.

في الحقيقة، إحدى القضيتين صحيحة والأخرى غير صحيحة. أيّ منهما تُعتبر الصحيحة؟ لمعرفة الإجابة، لا بدّ من النظر في خزانتي. قضية "تشرق الشمس في الشرق وتغرب في الغرب" صحيحة دائماً، وقضية "معدّل البعد بين الكرة الأرضية والقمر هو 1000000 كم" ليست صحيحة، لأنّ معدّل البعد بين الكرة الأرضية والقمر هو 384000 كم. أمّا جملة "في الأسبوع القادم، سيحضر سعيد في زيارة" فتصف حدثاً من المفترض أن يحدث في المستقبل ويمكن أن يكون صحيحاً أو غير صحيح. فنحن حالياً لا نعرف إن كان سعيد سيحضر في زيارة أم لا، لكن بعد أسبوع سنعرف ذلك. من هنا، يُمكن اعتبار هذه الجملة، أيضاً، قضية. وأمّا جملة "في سنة 2100 ستكون كلّ دول العالم متّحدة في امبراطورية واحدة" فتتطرق أيضاً إلى المستقبل، وعند قدوم هذا اليوم فإننا (أو أحفادنا) سنعلم إن كانت صحيحة أم لا. لذلك، يُمكن اعتبار هذه الجملة قضية، أيضاً.

فيما يأتي، أمثلة لعباراتٍ وجُمَلٍ ليست قضايا، لأنّها لا تُظهر وقائع.

- 1 كم الساعة؟
- 2 شكراً جزيلاً.
- 3 أمّي وأبي.
- 4 كلّ الأولاد في صفّي.
- 5 هل اليوم هو يوم الاثنين؟

فيما يأتي، قضايا تنطوي على قضايا جزئية:

- 1 اليوم يوم الأربعاء وغداً يوم الخميس.
- 2 اليوم يوم الأربعاء وغداً الجمعة.
- 3 يوجد لديّ بنطلون أسود أو لا يوجد لديّ بنطلون أسود.

القضية "اليوم يوم الأربعاء وغداً يوم الخميس" هي قضية مركّبة من قضيتين فرعيتين: "اليوم يوم الأربعاء" و"غداً يوم الخميس". هذه القضية صحيحة ليوم واحد في الأسبوع وغير صحيحة لستّة أيام في الأسبوع. كذلك، القضية "اليوم يوم الأربعاء وغداً يوم الخميس" هي قضية مركّبة من قضيتين فرعيتين، وهي غير صحيحة في أيّ حال من الأحوال. أمّا قضية "يوجد لديّ بنطلون أسود أو لا يوجد لديّ بنطلون أسود" فصحيحة دائماً.



هناك قضايا تحوي كلمة الشرط "إذا":

- 1 إذا اشتروا لي غداً بلوزة حمراء، سأعطي أبي قبلة.
- 2 إذا فاز فريق في اللعبة، سنحصل على جائزة.

هناك قضايا تحوي كلمات مثل "كل" أو "يوجد". تُعتبر هاتان الكلمتان "تعايير كمية"، لأنهما تُستعملان عند الحديث عن كميات.

- 1 في كل يوم في الاسبوع سأتناول البيتزا.
- 2 كل إنسان يُدعى جواد يحب البيتزا.
- 3 يوجد طالب في صفي يُدعى جواد.
- 4 لكل واحد من أولاد صفي يوجد بنطلون أسود.
- 5 هناك ولد في صفي لديه بنطلون أسود.

1 لكل واحدة من الجمل – اكتبوا هل هي قضية أم لا.

| الجملة                                            | قضية | ليست قضية |
|---------------------------------------------------|------|-----------|
| 1 التقيتُ دنيا البارحة.                           | X    |           |
| 2 ماذا تريد؟                                      |      | X         |
| 3 انا أحب اللبن.                                  |      |           |
| 4 أنا أحب اللبن وأنت تحب البيتزا.                 |      |           |
| 5 لا، تحت أيّ ظرف!                                |      |           |
| 6 قالت أميرة: " لا، تحت أيّ ظرف!"                 |      |           |
| 7 كلّ الأولاد في الصفّ قالوا: " لا، تحت أيّ ظرف!" |      |           |
| 8 متى رأيت المعلمة؟                               |      |           |
| 9 يوجد طالب في الصف يدعى ربيع.                    |      |           |
| 10 أنت تقول الحقيقة أو تكذب.                      |      |           |
| 11 إذا ضحكت سأحضنك.                               |      |           |
| 12 شكرًا لحضورك حفلي.                             |      |           |

حلول التمارين تظهر في نهاية الكراس. حاولوا أن تحلّوا التمارين بأنفسكم قبل فحص الإجابة. بما أن إجاباتكم قد تكون غير صحيحة حتى لو بدت لكم صحيحة، فمن المفضلّ مقارنتها بين الحين والآخر مع الإجابات في نهاية الكراس.

## 2. روابط منطقية

النوع الثاني من الأحرف في لغة حساب القضايا هو الروابط المنطقية، الذي يُتيح إمكانية بناء قضايا مركبة من قضايا نواتية (أساسية). سنعرض، في هذا الجزء، الروابط المنطقية ونبني بمساعدتها قضايا مركبة. سنرى كيف أن صحة أو عدم صحة القضايا المركبة تُحدد صحة أو عدم صحة القضايا النواتية التي تكونها. لا يُعتبر المعنى الكلامي لقضية بسيطة مهماً لبناء القضية المركبة وتحديد صحتها؛ كل ما سنحتاج إلى معرفته هو ما إذا كانت القضايا النواتية التي تكونها صحيحة. لهذا السبب سنختصر الكتابة ونشير إلى القضية النواتية بأحرف انجليزية على النحو الآتي:

$A =$  "يوجد لدي بلوزة خضراء"،

إذن، يمثل لنا الحرف  $A$  القضية "يوجد لدي بلوزة خضراء". على نحو مشابه، يمكن اعتبار

$B =$  "يوجد لدي بنطلون أزرق"،

ويمكن أيضاً اعتبار:

$C =$  "لدي قبة حمراء".

سنستعين، لاحقاً، بالقضايا الثلاث  $A$ ،  $B$  و  $C$  التي عرفناها هنا.

### 2.1. القضية النافية

يمكن نفي قضية "لدي بلوزة خضراء" بالصياغة الآتية: "ليس صحيحاً أن لدي بلوزة خضراء"، أي لا يوجد لدي بلوزة خضراء. لذلك، عندما يعبر  $A$  عن قضية "لدي بلوزة خضراء"، فإن نفي  $A$  يكون قضية "لا يوجد لدي بلوزة خضراء". يُشار إلى نفي قضية  $A$  بـ  $\neg A$ .

(ويمكن الإشارة إلى نفي قضية  $A$  بـ  $\sim A$ ).

تُعتبر قضية "ليس صحيحاً أنه لدي بلوزة خضراء" قضية مركبة، لأنها تحوي قضية أقصر منها، "لدي بلوزة خضراء".

نرمز بـ  $D$  إلى قضية "لا يوجد لدي بلوزة خضراء". في هذه الحالة، يكون نفي  $D$ ، الذي أشرنا له بـ  $\neg D$ ، "ليس صحيحاً أنه لا يوجد لدي بلوزة خضراء". معنى القضية  $\neg D$  باللغة العربية هو "يوجد لدي بلوزة خضراء". بمعنى أن القضية  $D$  تكافئ من حيث المعنى في اللغة العربية القضية  $\neg A$ ، و القضية  $\neg D$  تكافئ من حيث المعنى القضية  $A$ . نلاحظ هنا أن في الإمكان صياغة تصريح معين بحيث يكون قضية بسيطة أو قضية مركبة.

## 2.2. القضية المركبة "وأيضا"

مثال إضافي للقضية المركبة هو "يوجد لدي بلوزة خضراء ويوجد لدي بنطلون أزرق". هذه القضية مبنية من قضيتين نواتيتين (أساسيتين): "يوجد لدي بلوزة خضراء" التي أشرنا إليها في البداية بـ  $A$ ، و "لدي بنطلون أزرق" التي أشرنا إليها في البداية بـ  $B$ . لذا، يمكن اختصار هذه القضية وكتابتها على النحو الآتي: " $A$  وأيضا  $B$ ".

نستطيع اختصار الصياغة عبر هذه الصياغة  $A \wedge B$  مكان " $A$  وأيضا  $B$ ". انتبهوا: القضايا المكتوبة باختصار تُقرأ من اليسار إلى اليمين، كما نقرأ في اللغة الانجليزية. لذلك نكتب  $B \wedge A$  ونقرأ " $A$  وأيضا  $B$ ".

يمكن أيضا الحديث عن القضية " $A$  وأيضا  $B$  وأيضا  $C$ "، التي تشمل ما كُتب في القضايا الثلاث  $A$ ،  $B$  و- $C$ : يوجد لدي بلوزة خضراء، بنطلون أزرق وقبعة حمراء. نكتب القضية " $A$  وأيضا  $B$  وأيضا  $C$ " باختصار على النحو الآتي:  $A \wedge B \wedge C$ .

## 2.3. القضية المركبة "أو"

في العربية يوجد للكلمة "أو" معنيان مختلفان. عندما يقول أحدهم: "سأتصل بك أو سأرسل لك بريداً إلكترونياً" نفهم أنه سيقوم بأحد الأمرين ولكن ليس كليهما. بالمقابل، عندما أقول "أنا مريض، أخبرني الطبيب أنه يوجد لدي رشح أو التهاب في الأذن"، نفهم من ذلك أنه يمكن أن يكون عندي رشح أو التهاب في الأذن، وإن لم يحالفني الحظ، فسوف يكون لدي رشح و التهاب في الأذن. أي أن هناك إمكانيةً لأكون مصاباً بكل المرضين.

حساب القضايا هو لغة ذات معنى واحد، لذلك علينا اختيار أحد معنيي الكلمة "أو". سنختار المعنى الثاني: عندما يعبر  $A$  عن قضية "يوجد لدي بلوزة خضراء" ويعبر  $B$  عن قضية "يوجد لدي بنطلون أزرق"، فإن القضية " $A$  أو  $B$ " تعني أنه يوجد لدي بلوزة خضراء أو بنطلون أزرق (أو يوجد لدي بلوزة خضراء وأيضا بنطلون أزرق).

من المتعارف عليه كتابة  $A \vee B$  مكان " $A$  أو  $B$ ".

لماذا نستعمل الرمز  $\wedge$  للتعبير عن "وأيضا" والرمز  $\vee$  للتعبير عن "أو"؟ في اللاتينية، معنى الكلمة  $vel$  هو "واحد أو الآخر أو كلاهما". الحرف  $V$ ، وهو الحرف الأول في الكلمة، اتخذ الرياضيون للإشارة إلى الكلمة "أو". أما الرمز  $\wedge$  فهو عكس الرمز  $\vee$  واتخذ للرمز إلى الكلمة "وأيضا".

## 2.4. القضية المركبة "إذا... فإن..."

في لغة حساب القضايا التي نطورها نستطيع أيضاً أن نبني جُملاً شرطية بحسب المبنى الآتي: "إذا ... فإن..." .  
القضية "إذا A فإن B" تعني أنه إذا كانت القضية A صحيحة عندها تكون القضية B صحيحة أيضاً: "إذا كان لديّ بلوزة خضراء فإنّ لدي بنطلوناً أزرقاً". سوف نختصر ونكتب  $A \rightarrow B$  مكان "إذا A فإن B". نقرأ القضية  $A \rightarrow B$  على النحو الآتي: "A يؤدي إلى حدوث B".  
إذا اعتبرنا أن:

G = "غداً سأذهب إلى المدرسة" و-

H = "غداً سأرى جواد"،

يمكن صياغة القضية كما يأتي: "إذا G فإن H"، ويكون المعنى: إذا ذهبْتُ غداً إلى المدرسة عندها سأرى جواد غداً.

## 2.5. الأقواس

في المقدمة في صفحة 4 رأينا أنّ ترتيب الأسبقية بين الروابط المنطقية يغيّر معنى الجملة. نُحدّد أسبقية الروابط بواسطة استعمال الأقواس، كاستعمالنا لها في تمارين الحساب. على سبيل المثال:

A = "اسمي رامي"،

B = "اسم معلمي عمرو"،

C = "أنا أسكن في حيفا".

أمامنا قائمة من القضايا في لغة حساب القضايا، ومعناها في اللغة العربية:

| حساب القضايا                       | اللغة العربية                                                         |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $A \wedge (\neg C)$                | اسمي رامي ولا أسكن في حيفا.                                           |
| $\neg(A \wedge C)$                 | ليس صحيحاً أنّ اسمي رامي وأني أسكن في حيفا.                           |
| $(A \wedge B) \rightarrow C$       | إذا كان اسمي رامي واسم معلمي عمرو، إذاً أنا أسكن في حيفا              |
| $A \wedge (B \rightarrow C)$       | اسمي رامي، وإذا كان اسم معلمي عمرو، فإنني أسكن في حيفا.               |
| $\neg((A \wedge B) \rightarrow C)$ | ليس صحيحاً أنّه إذا كان اسمي رامي واسم معلمي عمرو فإنني أسكن في حيفا. |
| $(\neg(A \wedge B)) \rightarrow C$ | إذا لم يكن صحيحاً أنّ اسمي رامي واسم معلمي عمرو، فإنني أسكن في حيفا.  |

## 2.6. تلخيص

رأينا أنَّ لغة حساب القضايا مبنية من قضايا مركبة من الأحرف (A، B، C، ...)، ومن روابط منطقيّة وأقواس. القضية النواتية (الأساسية) هي قضية تحوي حرفاً واحداً فقط، بدون روابط وبدون أقواس. القضية المركبة هي قضية تحوي رابطاً منطقيّاً واحداً على الأقلّ.

**قضية نواتية (أساسية)** هي قضية تحوي حرفاً واحداً فقط، A، B، C، وهلمّ جرا. قضية مركبة هي قضية تحوي واحداً على الأقلّ من الرموز الآتية:  $\neg$ ،  $\wedge$ ،  $\vee$ ،  $\rightarrow$ .

معاني الرموز هي:

$A \wedge B$  وأيضاً B.

$A \vee B$  أو B.

$\neg A$  = ليس صحيحاً أنَّ A.

$A \rightarrow B$  = إذا A فإن B.

الطريقة التي يتم بحسبها تكوين جملٍ تسمّى بناء جملة (syntax)، وهذا ما رأيناه في البند السابق. في البند التالي سنتعامل مع معنى القضايا، مجال يدعى الدلالات (semantics).

2

$A$  = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر"،

$B$  = "يوجد لديّ مقلمة خضراء"،

$C$  = "يوجد لديّ حقيبة بنفسجية".

أكتبوا القضايا الآتية باستخدام الرموز A، B، C،  $\neg$ ،  $\wedge$ ،  $\vee$ ،  $\rightarrow$ .

أ. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء.

ب. ليس لديّ مقلمة بنفسجية.

ت. لديّ مقلمة خضراء أو لديّ قلم رصاص أحمر.

ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجية فإنّ لديّ مقلمة خضراء.

3

القضايا التي ظهرت في تمرين 2 كانت :

$A$  = " لديّ قلم رصاص أحمر"،

$B$  = " لديّ مقلمة خضراء"،

$C$  = " لديّ حقيبة بنفسجية".

اكتبوا القضايا الآتية بواسطة الرموز A ، B ، C ،  $\neg$  ،  $\wedge$  ،  $\vee$  ،  $\rightarrow$  ورمز الأقواس (-و).

أ. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء، وليس لديّ حقيبة بنفسجية.

ب. ليس صحيحاً أنّ لديّ حقيبة بنفسجية ومقلمة خضراء.

ت. ليس لديّ مقلمة خضراء أو قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء.

ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجية فإنه ليس لديّ مقلمة خضراء.

ج. إذا لم يكن لديّ حقيبة بنفسجية فإنه ليس لديّ مقلمة خضراء.

ح. ليس لديّ حقيبة بنفسجية، ليس لديّ مقلمة خضراء ويوجد لديّ قلم رصاص أحمر.

4 القضايا التي ظهرت في التمرينين 2 و-3 كانت:

A = "يوجد لديّ قلم رصاص أحمر"،

B = "يوجد لديّ مقلمة خضراء"،

C = "يوجد لديّ حقيبة بنفسجية".

اكتبوا المعنى الكلامي لكل قضية:

أ.  $A \vee (\neg C)$ :

ب.  $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg C)$ :

ت.  $(\neg A) \wedge (\neg C)$ :

ث.  $(C \vee (\neg B)) \wedge ((\neg C) \vee A)$ :

التمرينان 3 و4 ليسا بسيطين كما يظهران. بعد إنهاءكم حلّ التمرينين، افحصوا إجاباتكم مع الحلول التي تظهر في نهاية الكراس.

### 3. قيمة الصدق للقضية

كلّ قضية يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة. يوجد قضايا صحيحة (مثل "تشرق الشمس في الشرق وتغرب في الغرب")، يوجد قضايا ليست صحيحة (مثل "اليوم يوم الأربعاء وغداً يوم الجمعة") ويوجد قضايا يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة (مثل "اليوم يوم الثلاثاء"). هذه الصفة للقضية – كونها صحيحة أو غير صحيحة – تدعى قيمة الصدق للقضية.

قيمة الصدق للقضية تتلخص بكلمة "صدق" إذا كانت القضية صحيحة وبكلمة "كذب" إذا كانت القضية ليست صحيحة

قيمة الصدق للقضية "تشرق الشمس في الشرق" هي "صدق"، وقيمة الصدق للقضية "يوجد لبريطانيا وإسرائيل حدود مشتركة" هي "كذب". قيمة الصدق للقضية "ذهبت البارحة إلى الحديقة وركبت في الأرجوحة" يمكن أن تكون "صدق" أو "كذب": إذا كنت البارحة ذهبت إلى الحديقة وركبت في الأرجوحة، فإن قيمة الصدق للقضية هي "صدق". وإذا كنت البارحة لم أذهب إلى الحديقة، أو ذهبت إلى الحديقة، ولكن لم أركب في الأرجوحة، فإن قيمة الصدق للقضية هي "كذب". يمكن لقيمة الصدق للقضية أن تتغير مع الوقت: إذا كنت اليوم ذهبت إلى الحديقة وركبت في الأرجوحة، فإن غداً قيمة الصدق للقضية "البارحة ذهبت إلى الحديقة وركبت في الأرجوحة" ستكون صحيحة، حتى لو كانت قيمة الصدق للقضية اليوم هي "كذب".

قيمة الصدق للقضية هي المعنى. في الواقع، المعنى الوحيد الموجود للقضية في لغة حساب القضايا هو "صدق" أو "كذب".

5 قرروا ما إذا كانت قيمة الصدق في كلّ واحدة من القضايا تناسب فئة "صدق" أو "كذب". انتبهوا إلى أنّ تحديد قيمة الصدق للقضية يتعلّق بالشخص الذي تتحدّث عنه القضية في اللحظة الزمنية التي ذكرت فيها القضية. لذلك، فإنّ البندين 2 و4 للتمرين يتعلّقان بكم أنتم: سواء أكنتم في صفكم أو بين أفراد عائلتكم. يُمكن اعتبار هذه الملاحظة سارية أيضاً بالنسبة لكلّ التمارين الآتية في الكراس.

| القضية                                                  | صدق | كذب |
|---------------------------------------------------------|-----|-----|
| 1 رئيس الحكومة الأول لدولة إسرائيل كان دافيد بن غوريون. |     |     |
| 2 في كلّ يوم ثلاثاء تحصل مربيّتي على يوم إجازة.         |     |     |
| 3 $1+5=6$                                               |     |     |
| 4 لوالديّ يوجد ثلاثة أولاد.                             |     |     |
| 5 لكلّ إنسان يوجد ثلاثة أولاد بالضبط.                   |     |     |

تُعتبر القضايا الصحيحة في كل حالة قضايا مميزة – عندما نقابل/نواجه قضية من هذا النوع، لا نكون مضطرين للتفكير في ما إذا كانت الشروط المذكورة تتحقق فعلاً. على سبيل المثال، تكون القضية "في كل يوم ثلاثاء تحصل مربيتي على يوم إجازة" صحيحة فقط إذا كانت مربيتي تحصل على إجازة يوم الثلاثاء. لكي نقرر ما إذا كانت قيمة الصدق لهذه القضية صدق أم كذب، علينا التفكير إذا كان للمربية يوم إجازة، فعلاً، أيام الثلاثاء. توفّر علينا القضايا الصحيحة تعب التفكير، دائماً. قضية كهذه تدعى "الطوطولوجيا" "αὐτοψυχία". مصدر الكلمة من اليونانية: "طوطو" معناها "زائد" و"لوغوس"، كما نتذكر، تفسيرها "قول". بمعنى أن الطوطولوجيا هو القول الزائد عن الحاجة، أي من الواضح أنه صحيح.

"الطوطولوجيا" αὐτοψυχία هي قضية صحيحة في كل حالة: قيمة الصدق لها دائماً "صدق".

في المقابل، القضية التي تكون دائماً غير صحيحة تدعى "التناقض". حتى عندما يُطلب منا اتخاذ قرار ما حول قيمة الصدق للقضية، لا حاجة إلى التفكير في ما إذا كانت هناك شروط معينة تتحقق، لأنّ "التناقض" ليس صحيحاً في كل حالة.

التناقض هو قضية غير صحيحة في كل حالة: تكون قيمة الصدق للقضية "كذب"، دائماً.

بعض الأمثلة عن "الطوطولوجيا":

- 1 اسمي إباد أو اسمي ليس إباد.
- 2  $2+6=8$
- 3  $5>3$
- 4 إذا مزّقت ورقة من دفترك سيكون عدد صفحاته أقلّ بصفحة واحدة من عدد صفحاته الآن.

بعض الأمثلة عن التناقضات:

- 1  $3>5$
- 2 اليوم يوم الخميس وغداً يوم الاثنين.
- 3 لكلّ من يضع قبعة صفراء على رأسه لا يوجد قبعة على رأسه.
- 4 ليس صحيحاً كون إسمي إباد وليس صحيحاً كون إسمي ليس إباد.

الطريقة الأبسط لتكوين تناقض تكون عبر إضافة عبارة "غير صحيح أن" إلى قضية طوطولوجيا.

على سبيل المثال: القضية "إذا مزّقت ورقة من دفترك، سيكون عدد صفحاته أقلّ بصفحة واحدة من عدد صفحاته الآن" هي قضية "طوطولوجيا"؛ والقضية "غير صحيح أنه إذا مزّقت ورقة من دفترك سيكون عدد صفحاته أقلّ بصفحة واحدة من عدد صفحاته الآن" هي قضية "تناقض". يمكن بهذه الطريقة، أيضاً، تكوين قضية "طوطولوجيا" من التناقض: القضية "أمطرت السماء اليوم وريداً" هي قضية غير صحيحة دائماً، لذلك فإنها تعبر عن تناقض؛ وأما القضية "غير صحيح أن السماء أمطرت وريداً اليوم" فهي قضية صحيحة دائماً، ولذلك هي "طوطولوجيا".

6 لكل واحدة من القضايا – اكتبوا إذا كانت القضية "طوطولوجيا"، تناقض، أو لا هذه ولا تلك.

| قضية                                            | "طوطولوجيا" | تناقض | لا هذه ولا تلك |
|-------------------------------------------------|-------------|-------|----------------|
| 1 أنا إنسان.                                    |             |       |                |
| 2 أنا إنسان أو أنا حلزون.                       |             |       |                |
| 3 ليس صحيحًا أنني إنسان.                        |             |       |                |
| 4 ليس صحيحًا أنه من غير صحيح أنني إنسان.        |             |       |                |
| 5 الشباك مفتوح، أو الشباك مغلق والستارة مفتوحة. |             |       |                |
| 6 $10 < 5$ .                                    |             |       |                |
| 7 $10 > 5$ .                                    |             |       |                |
| 8 الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع.         |             |       |                |

7 اكتبوا قضيتي "طوطولوجيا" اثنتين، وقضيتي تناقض :

---



---



---



---



## 4. جداول صدق

في هذا البند سنتعامل مع قيم الصدق المتعلقة بالقضايا المركبة، وكيفية استنتاجها من قيم الصدق المتعلقة بالقضايا النواتية التي تكونها.

نشير إلى أن:

$A =$  "يوجد لدي قلم رصاص أحمر".

إذا كانت القضية  $A$  غير صحيحة، فنشير إليها بـ  $\neg A$ ، ونقول "لا يوجد لدي قلم رصاص أحمر". ما هي قيمة الصدق للقضية؟ تكون قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  عكس قيمة الصدق للقضية  $A$ : إذا كان لدي قلم رصاص أحمر، فإن القضية  $A$  صحيحة والقضية  $\neg A$  غير صحيحة؛ وإن لم يكن لدي قلم رصاص أحمر، فالقضية  $A$  غير صحيحة والقضية  $\neg A$  صحيحة.

إذا كانت القضية  $A$  تعرض حقيقة أخرى، على سبيل المثال:

$A =$  "اسمي لؤي"،

ما زالت قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  عكس قيمة الصدق للقضية  $A$ . كما نرى فإن قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  ليست متعلقة بالحقيقة التي تمثلها القضية  $A$ ، إنما بقيمة الصدق الخاصة بها.

تنطوي القضايا المركبة على ظواهر أخرى. على سبيل المثال، نشير إلى أن

$A =$  "يوجد لدي قلم رصاص أحمر".

$B =$  "يوجد لدي مقلمة خضراء".

القضية " $A$  وأيضاً  $B$ "، التي نشير إليها بـ  $A \wedge B$ ، تعني أنه يوجد لدي قلم رصاص أحمر ومقلمة خضراء. هذه القضية هي صحيحة وقيمة الصدق المتعلقة بها هي "صدق"، إذا كان لدي قلم رصاص أحمر وأيضاً مقلمة خضراء – أي، إذا كانت قيمة الصدق للقضية  $A$  هي "صدق" وأيضاً قيمة الصدق للقضية  $B$  هي "صدق". حتى لو غيرنا التصريحات التي تمثلها القضيتين  $A$  و  $B$ ، على سبيل المثال:

$A =$  "يسكن في القدس 700,000 شخص"،

$B =$  "المسافة بين تل أبيب والقدس هي 67 كيلومتراً"،

إن قيمة الصدق لـ  $A \wedge B$  تكون "صدق" فقط إذا كانت قيمة الصدق لكلا القضيتين  $A$  و  $B$  "صدق".

يُظهر المثالان المعروضان أعلاه أن في الإمكان تحديد قيمة الصدق لقضية مركبة من قيم الصدق للقضيتين النواتيتين اللتين تكونها. الجدول الذي يربط بين قيم الصدق للقضيتين النواتيتين وقيم الصدق للقضية المركبة يدعى جدول الصدق للقضية.

بدل أن نشير إلى قيمة الصدق للقضية بـ "صدق" أو بـ "كذب"، درجت العادة على الإشارة إلى هذه القيمة بـ  $T$  و  $F$ ، على التوالي. الحرف  $T$  هو اختصار للكلمة True (وتعني صحيح باللغة الانجليزية) والحرف  $F$  هو اختصار للكلمة False (وتعني خطأ باللغة الانجليزية).

**جدول الصدق لقضية** ما هو جدول يربط بين قيم الصدق للقضايا النواتية التي تكون القضية وبين قيمة الصدق للقضية.

## 4.1. جدول الصدق للقضية النفي

| $\neg A$ | $A$ |
|----------|-----|
| F        | T   |
| T        | F   |

سنبدأ من جدول الصدق للقضية المركبة الأبسط (الأقل تركيباً)،  $\neg A$ :

يعرض العمود الأيمن في الجدول قيم الصدق الممكنة للقضية النواتية  $A$ ، ويعرض العمود الأيسر قيمة الصدق الملائمة للقضية المركبة  $\neg A$ . يتعامل السطر الأول (تحت سطر العنوان الأزرق) مع الحالة التي تكون فيها القضية  $A$  صحيحة: قيمة الصدق لها  $T$ . في هذه الحالة تكون القضية  $\neg A$  غير صحيحة، ولذلك فإن

قيمة الصدق لها هي  $F$ . يتطرق السطر الثاني في الجدول إلى الحالة التي تكون فيها القضية  $A$  غير صحيحة: قيمة الصدق لها  $F$ . في هذه الحالة تكون القضية  $\neg A$  صحيحة، ولذلك فإن قيمة الصدق لها  $T$ .

## 4.2. جدول الصدق للقضية المركبة "وأيضاً"

فيما يأتي جدول الصدق للقضية المركبة  $A \wedge B$ :

| $A \wedge B$ | $B$ | $A$ |
|--------------|-----|-----|
| T            | T   | T   |
| F            | F   | T   |
| F            | T   | F   |
| F            | F   | F   |

في هذا الجدول، يظهر العمودان في الجهة اليمنى قيمة الصدق الممكنة للقضيتين النواتيتين  $A$  و  $B$  اللتين تكونان القضية المركبة؛ في حين يظهر العمود الأيسر قيمة الصدق الملائمة للقضية المركبة  $A \wedge B$ .

كم هو عدد الأسطر في جدول الصدق للقضية؟ يتطرق كل سطر في جدول الصدق لتعويض معين لقيم الصدق في كل واحدة من القضايا النواتية التي تكون القضية المركبة. على

سبيل المثال، القضية المركبة  $\neg A$  متعلقة بالقضية النواتية  $A$ . يوجد للقضية  $A$  قيمتان مُحتملتان،  $T$  و  $F$  ولذلك يشمل جدول القيم للقضية  $\neg A$  سطرين، السطر الأول لقيمة الصدق  $T$  والسطر الثاني لقيمة الصدق  $F$ .

تحتوي القضية المركبة  $A \wedge B$  قضيتين نواتيتين،  $A$  و  $B$ ، ولكل قضية نواتية قيمتا صدق مُحتملتان  $T$  و  $F$ . لذلك يضم الجدول  $2 \times 2 = 4$  أسطر، تكون ملائمة لهذه الحالات: (أ)  $A$  صحيح و  $B$  صحيح، (ب)  $A$  صحيح و  $B$  غير صحيح (ج)  $A$  غير صحيح و  $B$  صحيح، (د)  $A$  غير صحيح و  $B$  غير صحيح. سنرى فيما بعد جملاً مركبة تحتوي على ثلاث قضايا نواتية  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، بحيث يضم جدول الصدق الخاص بها  $2 \times 2 \times 2 = 8$  أسطر.

السطر الأول في جدول الصدق للقضية هو  $A \wedge B$  ومعناه أنه عندما تكون قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $T$  وقيمة الصدق للقضية  $B$  هي  $T$ ، فإن قيمة الصدق للقضية  $A \wedge B$  هي  $T$ . ولذلك، فإن القضية  $A =$  "يسكن في القدس 700,000 شخص" صحيحة جملاً للقضية  $B =$  "المسافة بين تل أبيب والقدس هي 67 كيلومتراً" صحيحة، وعليه تكون القضية  $A$  وأيضاً  $B$  صحيحة.

إذا كانت إحدى القضيتين  $A$  و  $B$  غير صحيحة، تكون القضية  $A$  وأيضاً  $B$  غير صحيحة. على سبيل المثال، إذا كانت المسافة بين تل أبيب والقدس ليست 67 كيلومتراً (أي، القضية  $B$  غير صحيحة) تكون القضية "يسكن في القدس 700,000 شخص وأيضاً المسافة بين تل أبيب والقدس هي 67 كيلومتراً" غير صحيحة. لذلك في السطر الثاني للجدول – الملائم للحالة التي تكون فيها قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $T$  وقيمة الصدق للقضية  $B$  هي  $F$  – تكون قيمة الصدق للقضية  $A \wedge B$  هي  $F$ . على نحو مشابه، تكون قيمة الصدق للقضية  $A \wedge B$  هي  $F$  أيضاً عندما تكون قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $F$  وقيمة الصدق للقضية  $B$  هي  $T$  (السطر الثالث في الجدول). وتكون قيمة الصدق للقضية  $A \wedge B$  هي  $F$  وأيضاً قيم الصدق لكلا القضيتين النواتيتين  $A$  و  $B$  هي  $F$  (السطر الرابع في الجدول).

بكلمات أخرى، القضية  $A \wedge B$  صحيحة فقط إذا كانت القضية  $A$  صحيحة وأيضاً القضية  $B$  صحيحة. هذا الأمر غير مفاجئ، لأن ذلك هو بالضبط المعنى الكلامي للقضية  $A \wedge B$ !

### 4.3. جدول الصدق للقضية المركبة "أو"

نترك كتابة جدول الصدق للقضية المركبة "أو" للقراء. تذكرُوا أنَّ القضية  $B \vee A$  صحيحة، إذا كانت على الأقل واحدة من كلا القضيتين  $A$  أو  $B$  صحيحة.

8 هذا الجدول هو جدول صدق للقضية  $A \vee B$ ، أكملوه!

| $A \vee B$ | B | A |
|------------|---|---|
|            | T | T |
|            | F | T |
|            | T | F |
|            | F | F |

### 4.4. جدول الصدق لقضية الشرط

معنى القضية المركبة  $A \rightarrow B$  هو: "إذا  $A$  فإن  $B$ ". لبناء جدول الصدق للقضية، سنتمعن في القضية المركبة "إذا أعطيتني شيكلين فسأعطيك شوكولاتة". هذه قضية مركبة تحوي قضيتين اثنتين:

$A$  = "إذا أعطيتني شيكلين"،

$B$  = "سأعطيك شوكولاتة".

ما هي الحالات التي يكون فيها التصريح "إذا أعطيتني شيكلين فسأعطيك شوكولاتة" صحيحاً؟

إذا أعطيتني شيكلين وأنا أعطيتك شوكولاتة – في هذه الحالة، يكون التصريح صحيحاً.



إذا أعطيتني شيكلين وأنا رفضت إعطائك شوكولاتة – في هذه الحالة، يكون التصريح غير صحيح.

وماذا لو لم تعطني أنت شيكلين؟ في هذه الحالة، بما أنك لم تحقق الشرط، فلا يوجد أي سبب لأنفذ جواب الشرط، ولذلك إن لم تعطني شيكلين، يكون التصريح "إذا أعطيتني شيكلين فسأعطيك شوكولاتة" صحيحًا، في حالة أنني أعطيك شوكولاتة أو لم أعطك شوكولاتة.

سنتمخّن في قضية شرط إضافية تمثل نفس النقطة.

القضية "إذا كان اسم أمي مريم فسأعطيك هدية" هي قضية شرط تضم المعنى  $A \rightarrow B$  فيها:

$A =$  "إذا كان اسم أمي مريم"،

$B =$  "سأعطيك هدية".

إنّ الأولاد الذين يشاركون هذه القضية دون أن يعطوا هدية لا يكذبون، لأنّ اسم أمهم ليس مريم. إلى جانب ذلك، شرط القضية هنا ليس صحيحًا (اسم أمي ليس مريم). تكون القضية صحيحة كلّها، سواء كان الاستنتاج صحيحًا أو غير صحيح.

يوجّهنا هذا النقاش إلى جدول الصدق للقضية المركبة  $A \rightarrow B$ :

| $A \rightarrow B$ | B | A |
|-------------------|---|---|
| T                 | T | T |
| F                 | F | T |
| T                 | T | F |
| T                 | F | F |

## 4.5. جداول قيم الصدق لقضايا مركبة إضافية

أحيانًا تعطى لنا قضية مركبة بدرجة أكبر، وعندها نحسب جدول قيم الصدق الخاصة بها على مراحل. على سبيل المثال، سنحاول كتابة جدول الصدق للقضية  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$ .

في سبيل ذلك، نرسم جدولًا فيه 4 أسطر؛ سطر واحد لكلّ إمكانية من قيم الصدق لـ  $A$  ولـ  $B$ ، و6 أعمدة. نسجل في أول عمودين الإمكانات الأربع لقيم الصدق الخاصة بـ  $A$  و  $B$ .

|  |  |  |  | B | A |
|--|--|--|--|---|---|
|  |  |  |  | T | T |
|  |  |  |  | F | T |
|  |  |  |  | T | F |
|  |  |  |  | F | F |

نرى أنَّ القضية المركبة  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$  تحوي القضايا  $\neg A$  و  $\neg B$ . لذلك نسجل في العمودين التاليين قيم الصدق لهاتين القضيتين: عندما تكون قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $T$ ، تكون قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  هي  $F$ ، وعندما تكون قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $F$ ، تكون قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  هي  $T$ . بشكل مشابه، نملأ العمود الخاص بالقضية  $\neg B$ .

|  |  | $\neg B$ | $\neg A$ | $B$      | $A$      |
|--|--|----------|----------|----------|----------|
|  |  | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |
|  |  | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> |
|  |  | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> |
|  |  | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> |

الآن أصبح في الإمكان إيجاد قيمة الصدق للقضية  $A \wedge (\neg B)$ . نضيف القضية في العمود الخامس من الجدول. الطريقة الأبسط لإجراء ذلك هي التمعّن في الأعمدة الملائمة للقضايا  $A$  و  $\neg B$  التي وجدناها سابقاً والاستعانة بجدول الصدق للقضية "وأيضاً"، التي وجدناها سابقاً، أيضاً.

|  | $A \wedge (\neg B)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $B$      | $A$      |
|--|---------------------|----------|----------|----------|----------|
|  | <b>F</b>            | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |
|  | <b>T</b>            | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> |
|  | <b>F</b>            | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> |
|  | <b>F</b>            | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> |

في النهاية، نجد جدول الصدق للقضية المركبة التي بدأنا منها،  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$ . يمكن إجراء ذلك من خلال التمعّن في الأعمدة الملائمة للقضايا  $\neg A$  و  $A \wedge (\neg B)$ ، والاستعانة بجدول الصدق للقضية  $A \vee B$  الذي وجدناه في تمرين 8.

| $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$ | $A \wedge (\neg B)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $B$      | $A$      |
|-------------------------------------|---------------------|----------|----------|----------|----------|
| <b>F</b>                            | <b>F</b>            | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> |
| <b>T</b>                            | <b>T</b>            | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> | <b>T</b> |
| <b>T</b>                            | <b>F</b>            | <b>F</b> | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> |
| <b>T</b>                            | <b>F</b>            | <b>T</b> | <b>T</b> | <b>F</b> | <b>F</b> |

توجد طريقة أقصر لإيجاد جدول الصدق للقضية، لكنّها تحتاج إلى بذل مجهود أكبر في التفكير.

مبنى القضية  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$  هو "قضية أو قضية"، ولذلك فهو صحيح إذا كانت إحدى القضيتين اللتين تكوناه صحيحة، أيّ أنّه إن كانت قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  هي  $T$  أو قيمة الصدق للقضية  $A \wedge (\neg B)$  هي  $T$ . تكون قيمة الصدق للقضية  $\neg A$  هي  $T$  إذا كانت قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $F$ ، وتكون قيمة الصدق للقضية  $A \wedge (\neg B)$  هي

T إذا كانت قيمة الصدق للقضية A هي T وقيمة الصدق للقضية B هي F. نسجل عندها T و F في جدول الصدق للقضية في الأسطر الملائمة للحالات التالية: قيمة الصدق لـ A هي F (السطر الثالث والرابع) وقيمة الصدق لـ A هي T (السطر الثاني). في السطر المتبقي، تكون قيمة الصدق للقضية  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$  ليست T، ولذلك فهي F. نسجل ذلك في السطر الأول في جدول الصدق. للإجمال، جدول الصدق للقضية  $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$  هو كالتالي:

| $(A \wedge (\neg B)) \vee (\neg A)$ | B | A |
|-------------------------------------|---|---|
| F                                   | T | T |
| T                                   | F | T |
| T                                   | T | F |
| T                                   | F | F |

على نحو متوقع، حصلنا على نفس النتيجة في الطريقتين اللتين استعنا بهما لإيجاد قيم الصدق.

9 عبّئوا جدول الصدق للقضية  $(B \vee (\neg A)) \wedge (\neg B)$ .

| $(B \vee (\neg A)) \wedge (\neg B)$ | $B \vee (\neg A)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | B | A |
|-------------------------------------|-------------------|----------|----------|---|---|
|                                     |                   |          |          | T | T |
|                                     |                   |          |          | F | T |
|                                     |                   |          |          | T | F |
|                                     |                   |          |          | F | F |

10 عبّئوا جدول الصدق للقضية  $(C \wedge (\neg A)) \vee ((\neg B) \wedge A)$ .

| $(C \wedge (\neg A)) \vee ((\neg B) \wedge A)$ | $(\neg B) \wedge A$ | $C \wedge (\neg A)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | C | B | A |
|------------------------------------------------|---------------------|---------------------|----------|----------|---|---|---|
|                                                |                     |                     |          |          | T | T | T |
|                                                |                     |                     |          |          | F | T | T |
|                                                |                     |                     |          |          | T | F | T |
|                                                |                     |                     |          |          | F | F | T |
|                                                |                     |                     |          |          | T | T | F |
|                                                |                     |                     |          |          | F | T | F |
|                                                |                     |                     |          |          | T | F | F |
|                                                |                     |                     |          |          | F | F | F |

11 عتّوا جدول الصدق للقضية  $(A \rightarrow (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee C)$ .

| $(A \rightarrow (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee C)$ | $(\neg B) \vee C$ | $A \rightarrow (\neg C)$ | $\neg C$ | $\neg B$ | C | B | A |
|-----------------------------------------------------|-------------------|--------------------------|----------|----------|---|---|---|
|                                                     |                   |                          |          |          | T | T | T |
|                                                     |                   |                          |          |          | F | T | T |
|                                                     |                   |                          |          |          | T | F | T |
|                                                     |                   |                          |          |          | F | F | T |
|                                                     |                   |                          |          |          | T | T | F |
|                                                     |                   |                          |          |          | F | T | F |
|                                                     |                   |                          |          |          | T | F | F |
|                                                     |                   |                          |          |          | F | F | F |

كما قلنا، "طوطولوجيا" هي قضية قيمة الصدق فيها دائماً "صدق" – في جدول الصدق الخاص بها نحصل فقط على T. بينما التناقض هو قضية قيمة الصدق فيها دائماً "كذب" – في جدول القيم الخاص بها نحصل فقط على F

12 أي من بين القضيتين التاليتين هي "طوطولوجيا"، أيها تناقض وأيها ليست طوطولوجيا وليست تناقض؟ يمكن الاستعانة بالجدول الذي يظهر بعد التمرين. بعد تعبئة الجدول، تكون القضية التي يلائمها العمود الذي يحوي الرمز T مرتين هي قضية "طوطولوجيا"، في حين أنّ القضية التي يلائمها العمود الذي يحوي الرمز F مرتين هي تناقض، والقضية التي يلائمها العمود الذي يحوي T وأيضاً F ليست قضية طوطولوجيا وليست قضية تناقض

| قضية                   | طوطولوجيا | تناقض | ليست "طوطولوجيا" وليست تناقض |
|------------------------|-----------|-------|------------------------------|
| أ. A                   |           |       |                              |
| ب. $A \vee (\neg A)$   |           |       |                              |
| ت. $A \vee A$          |           |       |                              |
| ث. $A \wedge (\neg A)$ |           |       |                              |

| $A \wedge (\neg A)$ | $A \vee A$ | $A \vee (\neg A)$ | $\neg A$ | $A$ |
|---------------------|------------|-------------------|----------|-----|
|                     |            |                   |          |     |
|                     |            |                   |          |     |

13 أي من القضايا الآتية يُعتبر قضية طوطولوجيا، أيها تناقضات وأيّها ليست طوطولوجيا وليست تناقضات؟ يمكن الاستعانة بالجدول الذي يظهر بعد التمرين.

| قضية                                                            | طوطولوجيا | تناقض | ليست "طوطولوجيا" وليست تناقض |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|-------|------------------------------|
| أ. $A \vee B$                                                   |           |       |                              |
| ب. $A \vee (A \rightarrow B)$                                   |           |       |                              |
| ت. $((\neg B) \rightarrow A) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$ |           |       |                              |
| ث. $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$                   |           |       |                              |

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \vee B$ | $A \rightarrow B$ | $A \vee (A \rightarrow B)$ | $(\neg A) \wedge (\neg B)$ | $(\neg B) \rightarrow A$ | $((\neg B) \rightarrow A) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$ |
|-----|-----|----------|----------|------------|-------------------|----------------------------|----------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| T   | T   | F        | F        | T          | T                 | T                          | F                          | T                        | F                                                            |
| T   | F   | F        | T        | T          | F                 | T                          | T                          | F                        | F                                                            |
| F   | T   | T        | F        | T          | T                 | T                          | F                          | T                        | F                                                            |
| F   | F   | T        | T        | F          | T                 | T                          | T                          | T                        | T                                                            |

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge (\neg B)$ | $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$ |
|-----|-----|----------|----------|---------------------|--------------------------------------------|
| T   | T   | F        | F        | F                   | T                                          |
| T   | F   | F        | T        | T                   | F                                          |
| F   | T   | T        | F        | F                   | T                                          |
| F   | F   | T        | T        | F                   | T                                          |

في بعض الأحيان يُعطى لنا جدول صدق وعلينا كتابة القضية المناسبة له.  
لنتمنّ في جدول الصدق الآتي، على سبيل المثال:

| قضية | B | A |
|------|---|---|
| F    | T | T |
| T    | F | T |
| F    | T | F |
| F    | F | F |

هل في الإمكان إيجاد قضية جدول صدقها هو الجدول أعلاه؟ يوجد في الجدول سطر واحد فقط فيه قيمة الصدق هي T – السطر الثاني. في هذا السطر، قيمة الصدق للقضية A هي T وقيمة الصدق للقضية B هي F. بكلمات أخرى، القضية الخاصة بها ستكون صحيحة فقط عندما تكون القضية A صحيحة والقضية B غير صحيحة. القضية التي تحقق هذه المعادلة هي القضية  $A \wedge (\neg B)$ .

إذا كنتم غير متأكدين من ذلك، قارنوا الجدول المعروض هنا مع جدول الصدق للقضية  $A \wedge (\neg B)$  الذي وجدتموه في تمرين 13.

وماذا بالنسبة لجدول الصدق الآتي:

| قضية | B | A |
|------|---|---|
| F    | T | T |
| T    | F | T |
| F    | T | F |
| T    | F | F |



هذا الجدول صحيح في حالتين:

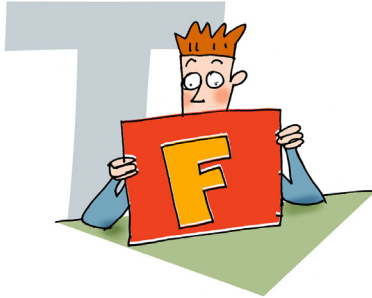
- عندما تكون القضية A صحيحة والقضية B غير صحيحة.
- عندما تكون القضية A غير صحيحة والقضية B غير صحيحة.

رأينا في المثال السابق أن القضية  $A \wedge (\neg B)$  تكون صحيحة فقط عندما تكون A صحيحة و B غير صحيحة (الحالة الأولى). كذلك، تكون القضية  $(\neg A) \wedge (\neg B)$  صحيحة فقط عندما تكون A غير صحيحة و B غير صحيحة (الحالة الثانية). القضية التي قيمة الصدق فيها هي T في كلتا الحالتين هي القضية  $((A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B)))$ . إذا لم تفهموا لماذا يُعتبر جدول الصدق هذا ملائماً للقضية، عبّئوا جدول الصدق الخاص بها بمساعدة الجدول الآتي:

| $(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$ | $A \wedge (\neg B)$ | $(\neg A) \wedge (\neg B)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | B | A |
|-------------------------------------------------------|---------------------|----------------------------|----------|----------|---|---|
|                                                       |                     |                            |          |          | T | T |
|                                                       |                     |                            |          |          | F | T |
|                                                       |                     |                            |          |          | T | F |
|                                                       |                     |                            |          |          | F | F |

وفق الجدول أعلاه، في جدول الصدق للقضية  $A \wedge (\neg B)$  تمت الإشارة إلى T واحد فقط – في السطر الملائم للحالة الأولى. كذلك في جدول الصدق للقضية  $(\neg A) \wedge (\neg B)$  يظهر الرمز T وحيداً – في السطر الملائم للحالة الثانية. عند إيجاد جدول الصدق للقضية

$(A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$ ، نحصل على الرمز T في كلّ سطر يحوي T في جدول الصدق الخاص بالقضية  $A \wedge (\neg B)$  أو في جدول الصدق الخاص بالقضية  $(\neg A) \wedge (\neg B)$ . ولذلك نحصل فيه على إشارتي T، كما أردنا.



نجمنا فعلاً في إيجاد قضية جدول قيمها هي:

| قضية | B | A |
|------|---|---|
| F    | T | T |
| T    | F | T |
| F    | T | F |
| T    | F | F |

لكن يوجد أيضاً قضايا إضافية، بل أقصر، يلائمها هذا الجدول. سنرى قضية واحدة كهذه. علينا الانتباه إلى أنّ العمود الأيسر يناقض عمود القضية B: عندما تكون قيمة الصدق للقضية B هي T، تكون قيمة الصدق للقضية التي نريد بناءها هي F، وعندما تكون قيمة الصدق للقضية B هي F، تكون قيمة الصدق للقضية التي نريد بناءها هي T. من هنا، تكون القضية التي نريد بناءها هي  $\neg B$ .

14 أكتبوا قضية يلائمها جدول الصدق الآتي:

| قضية | B | A |
|------|---|---|
| T    | T | T |
| F    | F | T |
| T    | T | F |
| T    | F | F |

الإجابة:

## 5. التكافؤ بين القضايا

سنعرّف في هذا البند على حالات تضمّ قضيتين متكافئتين.

إذا افترضنا أنّ:

$A =$  "عدت إلى البيت"،

$B =$  "تحدثت مع أبي".

معنى القضية  $\neg(A \wedge B)$  هو أنّه ليس صحيحاً أنّي عدت إلى البيت وتحدثت مع أبي. إن كان رجوعي إلى البيت وتحدثت مع أبي غير صحيح، هذا يعني أنّي لم أرجع إلى البيت أو أنّي لم أتحدث مع أبي، أو أنّ كلا قسَمَي الجملة لم يتحققا، أي لم أرجع إلى البيت ولم أتحدث مع أبي، أي أنّ القضية  $\neg(A \wedge B)$  مكافئة للقضية  $(\neg A) \vee (\neg B)$ .

سنسجل جدول الصدق لهاتين القضيتين:

| $(\neg A) \vee (\neg B)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | $\neg(A \wedge B)$ | $A \wedge B$ | $B$ | $A$ |
|--------------------------|----------|----------|--------------------|--------------|-----|-----|
| F                        | F        | F        | F                  | T            | T   | T   |
| T                        | T        | F        | T                  | F            | F   | T   |
| T                        | F        | T        | T                  | F            | T   | F   |
| T                        | T        | T        | T                  | F            | F   | F   |

نلاحظ أنّ جدول الصدق للقضية  $\neg(A \wedge B)$  يشابه جدول الصدق للقضية  $(\neg A) \vee (\neg B)$ .

نُسمي القضيتين متكافئتين إذا كان لهما نفس جدول الصدق.

نشير للتكافؤ بين قضيتين بواسطة الرمز  $\equiv$ .

على سبيل المثال، نكتب:  $(\neg A) \vee (\neg B) \equiv \neg(A \wedge B)$ .

15 ما هي أزواج القضايا المتكافئة في الجدول؟ يمكنكم الاستعانة بالجدول في نهاية التمرين.

| غير متكافئة | متكافئة | القضية الثانية               | القضية الأولى         |   |
|-------------|---------|------------------------------|-----------------------|---|
|             |         | $A \vee B$                   | $A \wedge B$          | 1 |
|             |         | $(\neg A) \vee (A \wedge B)$ | $A \rightarrow B$     | 2 |
|             |         | $A$                          | $\neg(\neg A)$        | 3 |
|             |         | $A \vee (\neg A)$            | $A \rightarrow A$     | 4 |
|             |         | $B$                          | $B \wedge (B \vee A)$ | 5 |

|  |  |  |  |  |  | B | A |
|--|--|--|--|--|--|---|---|
|  |  |  |  |  |  | T | T |
|  |  |  |  |  |  | F | T |
|  |  |  |  |  |  | T | F |
|  |  |  |  |  |  | F | F |
|  |  |  |  |  |  | B | A |
|  |  |  |  |  |  | T | T |
|  |  |  |  |  |  | F | T |
|  |  |  |  |  |  | T | F |
|  |  |  |  |  |  | F | F |

16 هل القضية  $(A \wedge B) \rightarrow (\neg C)$  مكافئة للقضية  $B \rightarrow (A \wedge C)$ ؟

الإجابة:

|  |  |  |  |  |  | C | B | A |
|--|--|--|--|--|--|---|---|---|
|  |  |  |  |  |  | T | T | T |
|  |  |  |  |  |  | F | T | T |
|  |  |  |  |  |  | T | F | T |
|  |  |  |  |  |  | F | F | T |
|  |  |  |  |  |  | T | T | F |
|  |  |  |  |  |  | F | T | F |
|  |  |  |  |  |  | T | F | F |
|  |  |  |  |  |  | F | F | F |

## 6. قواعد الاستنتاج

المنطق هو لغة دقيقة تساعدنا على تطوير قواعد (قوانين) نستطيع بمساعدتها برهنة ادعاءات مختلفة. في هذا البند سنبنّي بعض قواعد استنتاج ستمكننا من إثبات ادعاءات معينة.

### 6.1. قواعد الاستنتاج الإيجابي

لننتمّع في الحوار بين جود ووالدته.

جود: تعلّمت معلّمة الحساب في الجامعة.

الأم: كيف عرفت؟

جود: للحصول على شهادة تدريس، يجب على المعلّم أن يتعلّم في الجامعة، ولدى لمعلمتي شهادة تدريس؛ أي أنّها تعلّمت في الجامعة.

يبرهن جود ادّعاءه – "تعلّمت معلّمة الحساب في الجامعة" – بمساعدة سلسلة من الادعاءات المنطقية. هل طريقة برهان جود صحيحة؟

فلنفترض أنّ:

| $A \rightarrow B$ | B | A |
|-------------------|---|---|
| T                 | T | T |
| F                 | F | T |
| T                 | T | F |
| T                 | F | F |

$A =$  "يوجد للمعلمة شهادة تدريس"،

$B =$  "تعلّمت معلّمة الحساب في الجامعة".

يدّعي جود أنّ القضية  $A$  صحيحة (حيث يقول "تعلّمت معلّمة الحساب في الجامعة") وأنّ القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة (حيث يقول: "للحصول على شهادة تدريس يجب على المعلّم أن يتعلّم في الجامعة"), ومن هنا يستنتج أنّ القضية  $B$  صحيحة. لنفحص صحة ادعاء جود. سنتمعّن في جدول الصّدق للقضية  $A \rightarrow B$ :

السطر الوحيد الذي فيه قيمة الصّدق للقضية  $A$  هي  $T$  وقيمة الصّدق للقضية  $A \rightarrow B$  هي  $T$  هو السطر الأوّل (الملوّن بالرمادي) وفي هذا السطر قيمة الصّدق للقضية  $B$  هي  $T$ . من هنا نستنتج أنه إذا كانت قيمة الصّدق للقضية  $A$  هي  $T$  وأيضاً قيمة الصّدق للقضية  $A \rightarrow B$  هي  $T$  عندها بالضرورة ستكون قيمة الصّدق للقضية  $B$  هي  $T$ . ولذلك فإنّ ادعاء جود صحيح، إذا كانت لدى المعلمة شهادة تدريس وإذا على المعلمة، من أجل الحصول على شهادة تدريس، التعلّم في الجامعة، فإنّ المعلمة تعلّمت في الجامعة، بالضرورة.

سنلخص قاعدة الاستنتاج التي استعملها جود:

**قاعدة الاستنتاج الإيجابي:** إذا كانت القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة والقضية  $A \rightarrow B$  صحيحة، فإن القضية  $B$  صحيحة أيضاً.

يمكن الاستعانة بقاعدة الاستنتاج الإيجابي عدة مرات في سبيل برهان ادعاء معين. فلنتابع حواراً بين رانية وأبيها.

رانية: أبي، علينا الذهاب لتناول البوظة اليوم.

الأب: لماذا؟

رانية: أليس صحيحاً أنك وأمي تفخران بي عندما أحصل على علامة 95 في الامتحان؟

الأب: صحيح.

رانية: أليس صحيح أنه عندما يقوم أي شخص من أفراد العائلة بعمل نفتخر به، تذهب العائلة كلها لتناول البوظة.

الأب: صحيح.

رانية: حصلت على علامة 95 في امتحان الجغرافيا. لذلك يجب علينا الذهاب لتناول البوظة.

سنفحص إن كانت رانية قد استعملت في الحديث قاعدة الاستنتاج الإيجابي مرتين. فلنفترض أن:

$A =$  "حصلت على علامة 95 في امتحان الجغرافيا"،

$B =$  "أبي وأمي فخوران بي"،

$C =$  "أفراد العائلة يذهبون لتناول البوظة".

تقول رانية إن القضية  $A$  صحيحة، القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة والقضية  $B \rightarrow C$  صحيحة. بما أن القضيتين  $A$  و  $A \rightarrow B$  صحيحتان، نستطيع أن نستنتج، من خلال قاعدة الاستنتاج الإيجابي، أن القضية  $B$  صحيحة أيضاً: أُمي وأبي فخوران برانية. بما أن القضيتين  $B$  و  $B \rightarrow C$  صحيحتان، يمكن الاستعانة بقاعدة الاستنتاج الإيجابي مرة أخرى والاستنتاج بأن  $C$  صحيحة أيضاً: أي يجب الذهاب لتناول البوظة.

## 6.2. قواعد الاستنتاج الإيجابي: شروط كافية وضرورية

تسلّقت ميادة قَمّة التلّ. هل ستمكّن من رؤية الشّمس؟ حتى تتمكّن ميادة من رؤية الشّمس يجب أن تتحقّق شروط كثيرة. على سبيل المثال، يجب أن يكون الوقتُ بين الشروق والغروب، وأن لا تغطي الغيومُ الشّمس، وأن لا يبنوا على التلّ أبراج سكن تغطي الشّمس. تُدعى هذه الشّروط شروطاً ضرورية. إذا تمكّنت ميادة من رؤية الشّمس من قَمّة التلّ، فمن المؤكّد أنّ الشّمس أشرقت وحتى تلك اللحظة لم تغب، ومن المؤكّد أنّ لا غيوم تغطي الشّمس، ومن المؤكّد، أيضاً، أنّه لا توجد بنايات تغطي الشّمس.

سنترجم قصّة ميادة إلى لغة حساب القضايا. فلنفترض أن:

$A =$  "تسلّقت ميادة قَمّة التلّ ورأت الشّمس".

$B =$  "الغيوم لا تغطي الشّمس".

القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة، ومن خلال قاعدة الاستنتاج الإيجابي، إذا كانت القضية  $A$  صحيحة فإن القضية  $B$  صحيحة أيضاً: إذا وصلتنا رسالة من ميادة تخبرنا فيها أنّها تسلّقت قَمّة التلّ ورأت الشّمس، يمكننا الاستنتاج أنّ الغيوم لا تغطي الشّمس في المكان الذي تتواجد فيه.

علينا الانتباه: إن كانت القضية A غير صحيحة، أو إن كنا لا نعرف إن كانت صحيحة أو غير صحيحة، فإننا لا نستطيع استنتاج صحة القضية B. على سبيل المثال، إن لم ترسل لنا ميادة رسالة، فإننا لا نعرف ما إذا كانت الغيوم تغطي الشمس أم لا.

فيما يأتي أمثلة عديدة لجمل تُعتبر شرطاً أساساً لتحقيق الاستنتاجات المُقابلة لها:

| هذه الجملة شرط أساسي                           | لتحقيق هذا الاستنتاج                              |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| حصلت على علامة 100 في الامتحان الأخير في الأدب | سأحصل على علامة 100 في الأدب في شهادة نهاية السنة |
| سأذهب اليوم إلى المدرسة                        | سأقابل اليوم معلّمة المديريات                     |
| سأصل اليوم إلى المطار                          | سأطير اليوم إلى خارج البلاد                       |

من أجل الحصول على علامة 100 في الأدب في الشهادة في نهاية السنة عليّ الحصول على علامة 100 في كلّ امتحانات الأدب وتحديدًا في الامتحان الأخير.

لذلك إن الجملة "إذا حصلت على علامة 100 في الأدب في الشهادة نهاية السنة، فإن ذلك يعني بالتأكيد حصولي على علامة 100 في الامتحان الأخير في الأدب" تُعتبر صحيحة، ومن خلال الادّعاء بأنّ علامتي في موضوع الأدب في الشهادة هي 100 يمكن الاستنتاج بأنّ علامتي في الامتحان الأخير في الأدب هي 100. بالطريقة نفسها، نستنتج أنّني لمقابلة معلّمة المديريات عليّ زيارة المدرسة. وللطيران إلى خارج البلاد عليّ الوصول إلى المطار.

هناك شروط غير ضرورية للتوصّل إلى استنتاج معيّن.

على سبيل المثال، أبي وأمّي يفخران بأمير عندما يحصل على علامة 95 في الامتحان. هل من الضروري أن يحصل أمير على علامة 95 في الامتحان ليفخر به والداه؟ ليس بالضرورة!

هناك أسباب كثيرة تجعل الوالدين يفخران بأمير، مثلاً، إذا ساعد أمير جدّه في الأعمال المنزليّة، أو إذا ربّث غرفته، أو إذا لعب مع أخته الصغيرة. الشروط التي ذكرناها تدعى: شروط كافية: يكفي أن نعلم أنّ أحد هذه الشروط تحقّق للتوصّل للاستنتاج.

يمكن ترجمة قصّة أمير إلى لغة حساب القضايا، إذ نلاحظ أنّها تعبّر عن صورة أخرى لقاعدة الاستنتاج الإيجابي. فلنفترض أنّ:

$A =$  "ساعد أمير جدّه في الأعمال المنزلية"،

$B =$  "أمي وأبي فخوران بأمير".

القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة، لذلك إذا كانت القضية A صحيحة، فإنّ القضية B صحيحة أيضاً حسب قانون الاستنتاج الإيجابي.

فيما يلي أمثلة إضافية لجمل، كل واحدة منها تُعتبر شرطاً كافياً لتحقيق جملة أخرى.

| هذه الجملة هي شرط كافٍ           | لتحقيق الاستنتاج          |
|----------------------------------|---------------------------|
| سدّد جواد اليوم هدفاً في المرمى. | لعب جواد اليوم كرة القدم. |
| أعطيت أمي قبلة على الخد.         | قابلت أمي.                |
| اسمي جود                         | يحوي اسمي ثلاثة حروف.     |

الجمل التي تظهر في العمود الأيمن هي شروط كافية لتحقيق الجمل في العمود الأيسر: تكفي معرفة أنّ جواد سدّد هدفاً داخل المرمى، لكي نستنتج أنّه لعب كرة القدم؛ تكفي معرفة إعطائي قبلة لأمي لاستنتاج أنني قابلتها؛ ونكفي معرفة أنّ اسمي جود لاستنتاج أن اسمي يتكون من ثلاثة حروف.

يجب الانتباه إلى أنّه ليس من الضروري أن تكون القضية في العمود الأيمن صحيحة لكي تكون القضية في العمود الأيسر صحيحة، كذلك: يمكن أن لا يتحقق الشرط (اسمي ليس جود) ومع هذا يتحقق الاستنتاج (اسمي يتكون من ثلاثة حروف، مثلاً، لأن اسمي مجد).

17 بجانب الحالات المذكورة في الجدول، اكتبوا إن كان الشرط هو شرط كافٍ وغير ضروري، شرط ضروري وغير كافٍ، أو شرط ضروري وكافٍ للدعاء.

| الشرط                       | الاستنتاج                  | شرط ضروري | شرط كافٍ |
|-----------------------------|----------------------------|-----------|----------|
| اليوم يوم الثلاثاء          | غداً يوم الأربعاء          | نعم       | نعم      |
| يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع | هذا الشكل هو مربع          |           |          |
| يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع | هذا الشكل هو شكل رباعي     |           |          |
| سألعب كرة قدم               | سأسدّد هدفاً في المرمى     |           |          |
| هذا المخلوق من الثدييات     | هذا المخلوق هو إنسان       |           |          |
| هذا المخلوق هو إنسان        | هذا المخلوق من الثدييات    |           |          |
| رؤوف هو أخي                 | رؤوف هو ولد ولنا أبٌ مشترك |           |          |

### 6.3. قانون الاستنتاج وتعويض جمل مركبة

قانون الاستنتاج الإيجابي يعني أنه إذا كانت القضية  $A$  صحيحة والقضية  $A \rightarrow B$  صحيحة، فإن القضية  $B$  صحيحة، كذلك يمكن تغيير الحرفين  $A$  و  $B$  اللذين يظهران في الاستنتاج. على سبيل المثال، يمكن كتابة  $D$  بدل  $A$  وعندها يظهر قانون الاستنتاج الإيجابي. إذا كانت القضية  $D \rightarrow B$  صحيحة وإذا كانت القضية  $D$  صحيحة، تكون القضية  $B$  صحيحة، أيضاً. حالياً، يمكن تبديل القضية  $B$  الظاهرة في قانون الاستنتاج الإيجابي بقضية مثل  $\neg A$ . من هنا، نستنتج أنه إذا كانت القضية  $\neg A \rightarrow D$  صحيحة، وإذا كانت القضية  $D$  صحيحة، فإن القضية  $\neg A$  صحيحة، أيضاً؛ ما يعني أن القضية  $A$  ليست صحيحة. سنرى مثلاً إضافياً في الحوار الآتي:

جود: إذا كان طولي متراً وخمسين، فلن أتمكن من اللعب في منتخب كرة قدم.

الأب: لكن طولك متر وخمسين.

جود: وبالفعل، أنا لا أعب في منتخب كرة القدم.

استعمل جود القضيتين:

$A = \text{"طولي متر وخمسين"}$

$C = \text{"أنا أعب في منتخب كرة القدم"}$

وادّعى أن القضية  $(\neg C) \rightarrow A$  صحيحة. ادّعى الأب أن القضية  $A$  صحيحة، ولذلك من قانون الاستنتاج الإيجابي ينتج أن القضية  $\neg C$  صحيحة هي أيضاً، أي أن القضية  $C$  ليست صحيحة.

### 6.4. قانون الاستنتاج وتعويض جمل مركبة

عاد جود في أحد الأيام الى البيت واشتكى.

جود: لم أفهم المواد هذا اليوم.

الأم: لماذا لم تصغ في الدرس؟

جود: كيف عرفت أنني لم أصغ في الدرس؟

الأم: عندما تصغي في الدرس تفهم المواد، إن لم تفهم المواد، فهذا يدل على أنك لم تصغ في الدرس.

من الواضح أن الأم، أيضاً، تستطيع التوصل إلى استنتاجات بمساعدة قانون الاستنتاج.

فلنفترض أن:

| $A \rightarrow B$ | $B$ | $A$ |
|-------------------|-----|-----|
| T                 | T   | T   |
| F                 | F   | T   |
| T                 | T   | F   |
| T                 | F   | F   |

A = "جود يصغي في الدرس"،

B = "جود يفهم المواد".

تقول الأم إن القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة. اعترف جود أن القضية B غير صحيحة. من هنا، استنتجت الأم أن القضية A غير صحيحة. هل الأم صادقة؟ لمعرفة ذلك، سنكتب مرة أخرى جدول الصدق للقضية  $A \rightarrow B$ .

السطر الوحيد في جدول الصدق الذي فيه القضية B غير صحيحة والقضية  $A \rightarrow B$  صحيحة هو السطر الرابع (المشار إليه بلون رمادي، وفيه القضية A غير صحيحة. لذلك، كان كلام الأم صحيحًا: جود لم يصغ في الدرس.

18 يقول طارق لصديقه فادي: "في كل مرة أزور بها بيت خالتي عبير نلعب الشطرنج، وفي كل مرة نلعب فيها الشطرنج تفوز عبير. في يوم السبت السابق لم تفز عبير في الشطرنج". "إن كان الأمر كذلك" يقول فادي، "فأنت لم تزر خالتك عبير". في هذا التمرين سنسجل القواعد التي استعان بها فادي للتوصل إلى الاستنتاج بأن طارق لم يزر خالته عبير.

أ. اكتبوا بالكلمات القضايا التي يصفها طارق في قصته.

= A

= B

= C

ب. اكتبوا بلغة حساب القضايا، القضايا التي صرح طارق أنها صحيحة.

ت. اكتبوا كل قوانين الاستنتاج التي استعان بها فادي للتوصل إلى الاستنتاج بأن طارق لم يزر خالته عبير، وكل ما استنتجه من قاعدة الاستنتاج.



## 6.5. قواعد استنتاج إضافية

يوجد قواعد استنتاج إضافية أخرى، على سبيل المثال:

قانون الاستنتاج "وأيضًا": إذا كانت القضية  $A \wedge B$  صحيحة، تكون القضية  $A$  صحيحة، أيضًا.

قانون الاستنتاج "أو" السلبي: إذا كانت القضية  $A \vee B$  صحيحة والقضية  $A$  غير صحيحة، تكون القضية  $B$  صحيحة.

لنتمكن من الاقتناع بأن قواعد الاستنتاج هذه صحيحة، سنكتب جدولي الصدق للقضيتين  $A \vee B$  (من جهة اليمين) و  $A \wedge B$  (من جهة اليسار).

| $A \wedge B$ | $B$ | $A$ | $A \vee B$ | $B$ | $A$ |
|--------------|-----|-----|------------|-----|-----|
| T            | T   | T   | T          | T   | T   |
| F            | F   | T   | T          | F   | T   |
| F            | T   | F   | T          | T   | F   |
| F            | F   | F   | F          | F   | F   |

في جدول الصدق للقضية  $A \wedge B$  (من جهة اليسار) تمت الإشارة إلى السطر الوحيد الذي فيه القضية  $A \wedge B$  صحيحة، وفي هذا السطر القضية  $A$  صحيحة. لذلك، تتحقق هنا قاعدة الاستنتاج "إذا كانت القضية  $A \wedge B$  صحيحة فإن القضية  $A$  صحيحة أيضًا".

على نحو مشابه، في جدول الصدق للقضية  $A \vee B$  (من جهة اليمين) تمت الإشارة إلى السطر الوحيد الذي فيه القضية  $A$  غير صحيحة والقضية  $A \vee B$  صحيحة، وفي هذا السطر، القضية  $B$  صحيحة. لذلك، تتحقق هنا قاعدة الاستنتاج "إذا كانت القضية  $A \vee B$  صحيحة والقضية  $A$  غير صحيحة، فإن القضية  $B$  صحيحة".

19 فسّروا لماذا تتحقق قاعدة الاستنتاج "إذا كانت القضية  $A$  صحيحة فإن القضية  $A \vee B$  صحيحة".  
يمكن الاستعانة بجدول الصدق للقضية  $A \vee B$  الموجود في الأعلى.

---



---



---



---

20 فسّروا لماذا تتحقق قاعدة الاستنتاج: "إذا  $A \rightarrow B$  غير صحيحة فإن  $B$  غير صحيحة". يمكن الاستعانة بجدول الصدق للقضية  $A \rightarrow B$ .

| $A \rightarrow B$ | $B$      | $A$      |
|-------------------|----------|----------|
| <b>T</b>          | <b>T</b> | <b>T</b> |
| <b>F</b>          | <b>F</b> | <b>T</b> |
| <b>T</b>          | <b>T</b> | <b>F</b> |
| <b>T</b>          | <b>F</b> | <b>F</b> |

---



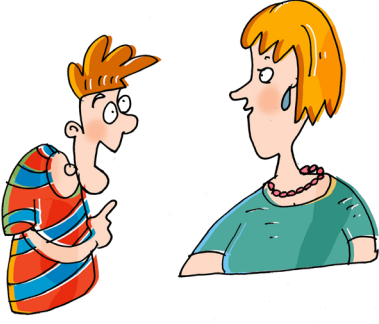
---



---



---



21 لنتمعن في الحوار بين جود وأمه:

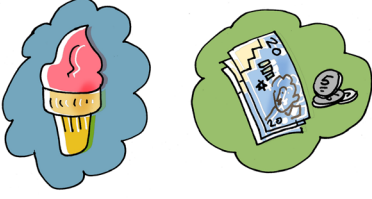
جود: لو كان معي نقود لكنت اشتريت بوظة.

الأم: لو اشتريت بوظة، ستعاني من ألم الأسنان.

جود: ولكن لا يوجد لدي ألم أسنان.

الأم: إذا كان الأمر كذلك، فهذا يعني أنه لم يكن معك نقود.

فلنفترض أن:



A = "كان مع جود نقود"،

B = "اشترى جود بوظة"،

C = "يعاني جود من ألم أسنان".

أ. اكتبوا برموز رياضية القضية التي يدّعي جود بأنها صحيحة.

ب. اكتبوا برموز رياضية القضية التي تقول الأم بأنها صحيحة:

ت. فسّروا كيف توصّلت الأم إلى أنه لم يكن مع جود نقود.

22 قالت رنا لأبيها: "ذهبت الى المدرسة ورأيت صديقتي دنيا. بما أنني ذهبت الى المدرسة، فقد رأيت معلمتي. أنت تعلم أنه إذا كانت المعلمة مريضة، فلن أتمكن من رؤيتها في المدرسة".  
 "إذا كان الأمر كذلك"، قال الأب، "فإن المعلمة لم تكن مريضة اليوم".

أ. اكتبوا القضايا التي تصفها رنا في قصتها:

= A

= B

= C

= D

ب. اكتبوا برموز رياضية القضايا الصحيحة التي صرّحت بها رنا.

ث. اكتبوا جميع قواعد الاستنتاج التي استعان بها الأب للتوصل إلى الاستنتاج بأن المعلمة لم تكن مريضة، وما استنتجه من كل قواعد الاستنتاج:

## 7. التعابير الكمية

نحتاج، أحياناً، إلى تمثيل قضايا تتعامل مع أشخاص أو أغراض. فيما يأتي بعض الأمثلة:

1. كلّ طلاب الصفّ تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء.
  2. كلّ طالب معدل علاماته أعلى من 90 حصل على شهادة تفوق.
  3. كلّ واحد من طلاب الصف يعرف طالباً واحداً على الأقلّ من الصف المقابل.
  4. يوجد طلاب في الصف يعرفون جميع الطلاب في الصف المقابل.
  5. يوجد، على الأقلّ، ثلاثة طلاب في الصف يعرف كلّ واحد منهم على الأقلّ طالبين من الصف المقابل.
- سننوسع في هذا البند بلغة حساب القضايا: سنضيف كلمتين من مجموعة "التعابير الكمية" التي تساعدنا في التعبير عن هذه القضايا. التعبير الكميّ الأوّل هو كلمة "لكلّ"، والتعبير الكميّ الثاني هو كلمة "كمية". تساعد هذه الرموز في التعبير عن القضايا التي تتناول فئة الكميات.

### 7.1. التعبير الكميّ "لكلّ"

كيف نكتب القضية "كلّ طلاب الصف تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"؟ يمكن كتابة الجملة عبر قضية نواتية:

$A = \text{"كلّ طلاب الصف تعلّموا أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$

هذه الصياغة تخفي الحقيقة بأنّ للقضية مبنى خاصاً وأنها تتحدّث عن حقيقة تتحقّق لجميع طلاب الصف. يمكن كتابة الجملة بواسطة الرموز:

$B = \text{"تعلّم أمير أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$

$C = \text{"تعلّمت رنا أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$

$D = \text{"تعلّم جود أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$

سنرمز لكلّ ولد في الصفّ بقضية تبيّن الحقيقة التي تعلّمها بأن بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء. في هذه الحالة، تكون القضية A هي القضية المركبة "B وأيضاً C وأيضاً D وأيضاً ...".

تشير لنا هذه الطريقة في العرض أنّ القضية A هي قضية مركبة وهي تتحقّق فقط إذا تحقّقت القضايا الأخرى – القضايا B، C، D وكلّ القضايا الإضافية الملائمة لطلاب الصف الآخرين. لكنها توضّح أنّ للقضايا B، C، D ولكلّ القضايا الإضافية يوجد مبنى مشابه: في جميعهم طالب معيّن تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء.

للاختصار في الكتابة، يمكن تعريف القضية  $B(x)$  على النحو الآتي:

$B(x) = \text{"الطالب x تعلّم أنّ بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$

لا يمثل الحرف الانجليزي  $x$  اسم طالب معين إنما يمثل متغيراً: يمكن أن يمثل اسم أي طالب من مجموعة طلاب معينة. نحن نتحدث هنا عن مجموعة طلاب الصف، ولذلك فإن قيمة المتغير  $x$  يمكن أن تمثل كل اسم من أسماء طلاب الصف. سندعو هذه المجموعة "مجال تعريف المتغير  $x$ ".

**مجال تعريف المتغير** هو مجموعة القيم التي يمكن أن يحصل عليها المتغير.

إذا كان  $x = \text{عمر}$ ، فإن  $B(x)$  هي بالفعل (عمر)  $B$ ، والقضية هي "عمر  $x$  تعلم أن بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء". إذا كان  $x = \text{جوليا}$ ، فإن  $B(x)$  هي (جوليا)  $B$ ، والقضية هي "جوليا تعلمت أن بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء".

إن لم نكن نعلم ما هي قيمة المتغير الذي يمثل  $x$ ، فإن الجملة  $B(x)$  ليست قضية: إذا لم نعرف من هو ولد الذي يمثله  $x$  فليس في الإمكان القول ما إذا كانت  $B(x)$  جملة صحيحة أو غير صحيحة. إذا عرفنا قيمة المتغير  $x$  - عندها فقط تكون  $B(x)$  قضية؛ فقط إذا كانت قيمة المتغير  $x$  معلومة يمكن القول إن  $B(x)$  صحيحة أو غير صحيحة. على سبيل المثال، جوليانا تعلمت أن بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء: القضية (جوليانا)  $B$  صحيحة. ولكن إذا كان عمر مريضاً عندما علمت المعلمة الموضوع، تكون قضية (عمر)  $B$  غير صحيحة.

كما ذكرنا، القضية  $A$  هي:

$A = \text{"كل طلاب الصف تعلموا أن بنت فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"}$ .

بصيغة أخرى، القضية  $A$  هي: "لكل طالب  $x$  في الصف، القضية  $B(x)$ ".

نسجل، بلغة المنطق، الكلمة "لكل"، مستعينين بالرمز  $\forall$ ، وهو الحرف الانجليزي  $A$  بالمقلوب. هذا الحرف هو الحرف الأول في الكلمة الانجليزية  $All$ ، ومعناها "كل". القضية "لكل طالب  $x$  في الصف، تكون القضية  $B(x)$  صحيحة" نكتب باختصار هكذا:

$$\forall x(B(x))$$

كالمعتاد، نبدأ بقراءة القضية من جهة اليسار، نبدأ بالرمز  $\forall$  الذي نقرأه "لكل"، بعدها يكون دور الحرف  $x$  وبعدها القضية  $B(x)$ . القضية  $\forall x(B(x))$  تقرأ: "لكل  $x$ ، القضية  $B(x)$ ". علينا دائماً ذكر مجال تعريف  $x$ ، والذي هو في هذه الحالة طلاب الصف.

من المفهوم ضمناً أن في الإمكان استعمال متغير آخر غير  $x$ ، مثل  $y$  أو  $z$ . وهكذا، إذا كان مجال تعريف  $y$  هو مجموعة كل البيوت في العالم، و  $C(y) = \text{"البيت } y \text{ يوجد سقف"}$ ،

عندها تكون القضية هي  $\forall y(C(y))$  بمعنى أن لكل البيوت في العالم يوجد سقف.

إذا كان مجال تعريف  $z$  هو كل سكان إسرائيل الذين تزيد اعمارهم عن 81 سنة، و

$D(z) = \text{"الشخص } z \text{ صوت في الانتخابات الأخيرة للكنيست"}$ ،

عندها تكون القضية  $\forall z(D(z))$  بمعنى أن كل سكان إسرائيل الذين تزيد اعمارهم عن 81 سنة صوتوا في الانتخابات الأخيرة للكنيست.

كيف نكتب بلغة حساب القضايا: "إذا كان لدينا اليوم حصّة دين، فإنّ كلّ الطلاب في الصّف سيتعلّمون أنّ: "ابنة فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء. من أجل ذلك، سنستعمل القضايا الآتية:

$E =$  "سيكون اليوم لدينا حصّة دين"،

$B(x) =$  "الطالب  $x$  سيتعلّم أن ابنة فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء"،

مجال التعريف للمتغير  $x$  هو كلّ طلاب الصّف. وعليه، تُكتب القضية "لو كان لدينا اليوم حصّة دين، عندها سيتعلم كلّ الطلاب أنّ ابنة فرعون وجدت موسى في سلّة تطفو فوق الماء" على النحو الآتي:

$$E \rightarrow \forall x(B(x))$$

هناك حالات نستعين فيها بأكثر من متغير واحد في الجملة. على سبيل المثال، لكتابة القضية "كلّ طلاب الصّف يعرفون كلّ طلاب الصف المقابل" سنحتاج إلى متغيرين: متغير  $x$ ، الذي مجال تعريفه هو كلّ طلاب الصّف، متغير  $y$ ، الذي مجال تعريفه كلّ طلاب الصف المقابل. إذا افترضنا أنّ:

$B(x,y) =$  "طالب  $x$  يعرف الطالب  $y$ "،

فإنّ القضية "كلّ الطلاب في الصّف يعرفون كلّ الطلاب في الصف المقابل"، تُكتب على النحو الآتي:

$$\forall x \forall y(B(x,y))$$

23 لنتمعّن في القضية: "يوجد لكلّ السيّارات في العالم أربعة دواليب". اعرضوا القضية بلغة حساب القضايا وحدّدوا مجال تعريف المتغير الذي ستستعملونه.

القضية  $C(x) =$

مجال تعريف المتغير  $x$ :

القضية بلغة حساب القضايا:

24 فلنفترض أن  $B(x)$  = "الطالبة x وصلت اليوم مرتدية تنورة خضراء"؛ مجال التعريف هو كل طالبات الصف اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ.  $B(x)$  (منى):

ب.  $\neg B(x)$  (تالا):

ت.  $(\neg B(x)) \wedge (B(x))$  (دينا):

ث.  $(\neg B(x)) \rightarrow (B(x))$  (دينا):

ج.  $\forall x(B(x))$ :

25 لنتمعن في القضية:  $E$  = "إذا كان لدى كل طالب في الصف أخوة، عندها سيكون في الإمكان تنظيم لعبة كرة قدم في اليوم الرياضي". فلنفترض أن:

$A(x)$  = "للطالب x يوجد أخوة"،

$B$  = "في الإمكان تنظيم لعبة كرة قدم في اليوم الرياضي".

أ. مجال تعريف  $x$ :

ب. اكتبوا القضية  $E$  بواسطة  $A(x)$ ،  $B$ ، والرمز الكمي  $\forall$ :

## 26 فنلتفرض أن:

$A(x)$  = "الطالب  $x$  جاء اليوم إلى المدرسة"،

$B(x)$  = "الطالب  $x$  سمع محاضرة عن الإنسان القديم".

مجال تعريف المتغير  $x$  هو مجموعة طلاب الصف.

اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ.  $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ : جاء كل طلاب الصف اليوم إلى المدرسة وسمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

ب.  $\forall x(A(x) \vee B(x))$ :

ت.  $\forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x))$ :

ث اكتبوا حالة تكون فيها قيمة الصدق للقضية في البند (ب) "صدق" وتكون قيمة الصدق للقضية في البند (ت) "كذب".

ج  $\forall x(B(x) \rightarrow (\neg A(x)))$ :

كما هو الحال لكل قضية، قيمة القضية  $\forall x(A(x))$  هي "صدق". تكون القضية  $\forall x(A(x))$  صحيحة إذا تحققت القضية  $A(x)$  في مجال تعريف  $x$ ، وتكون القضية غير صحيحة إذا كانت قيمة واحدة، على الأقل، من مجال تعريف  $x$  في القضية  $A(x)$  غير صحيحة.

27 حدّدوا قيمة الصّدق للقضيّة  $\forall x(A(x))$  في كلّ واحدة من التعريفات المعطاة لـ  $A(x)$ :

| $A(x)$                          | مجال تعريف المتغيّر $x$ | صدق | كذب | أحياناً صدق<br>وأحياناً كذب |
|---------------------------------|-------------------------|-----|-----|-----------------------------|
| 1. يوجد للطالب $x$ قلب          | كلّ طلاب الصف           |     |     |                             |
| 2. يوجد لكلّ دولة رئيس          | كلّ دول العالم          |     |     |                             |
| 3. $0 \leq x^2$                 | كلّ الأعداد             |     |     |                             |
| 4. لا يوجد للطالب $x$ شعر أشقر  | كلّ طلاب الصف           |     |     |                             |
| 5. يوجد لكلّ شخص 3 أولاد بالضبط | كلّ الأشخاص في العالم   |     |     |                             |

## 7.2 التعبير الكمي "يوجد"

التعبير الكمي "يوجد" يشبه التعبير الكمي "لكلّ"، وهو يمكّننا من كتابة قضايا شبيهة بالقضيّة "يوجد طالب في الصف شعره أشقر".

فلنفترض أنّ:

$$A(x) = \text{"الطالب } x \text{ يوجد شعره أشقر"}$$

عندما يكون مجال تعريف المتغير  $x$  هو طلاب الصف، تُكتب القضيّة "يوجد طالب في الصف شعره أشقر" على النحو الآتي:

$$\exists x(A(x))$$

الرمز  $\exists$  هو الحرف الإنجليزي E ولكن بوضعية معكوسة، وهذا الحرف هو الحرف الأوّل في الكلمة الانجليزية exist والتي تعني "يوجد". لذلك تم اختيار هذا الرمز ليعبّر عن الكلمة "يوجد" بلغة حساب القضايا.

28 لنتمعّن في القضيّة: "يوجد دولة عاصمتها لندن".

اكتبوا مجال تعريف المتغير  $x$  والمعنى الكلامي للقضيّة  $B(x)$  التي تمثّل القضيّة  $\exists x(B(x))$  "يوجد دولة عاصمتها لندن".

مجال تعريف المتغير:

$$= B(x)$$

## 7.3. "يوجد طالبان على الأقل..."

يساعدنا المصطلح الكمي، "لكل"، في التعبير عن قضايا تتحدث عن صفة معينة تتحقق لكل عناصر مجموعة معينة، بينما يساعدنا المصطلح الكمي، "يوجد"، في التعبير عن قضايا تتحدث عن صفة معينة تتحقق على الأقل في واحد من عناصر المجموعة. يوجد قضايا إضافية تبحث في الكميات، فعلى سبيل المثال، "يوجد على الأقل طالبان في الصف يدعيان عمرو"، أو يوجد على الأكثر طالبان في الصف يدعيان داوود". سنرى الآن كيف يمكننا التعبير عن جمل كهذه بواسطة المصطلحين الكميّين، "لكل" و "يوجد".

كيف نكتب، بلغة حساب القضايا، القضية الآتية: "يوجد في الصف طالبان على الأقل اسمهما عمرو"؟ حتى يكون في الصف على الأقل ولدان اسمهما عمرو، يجب أن يكون في الصف طالب  $x$  اسمه عمرو، وطالب  $y$  اسمه عمرو، بحيث يكون طالب  $x$  مختلف عن الطالب  $y$ . نرمز إلى ذلك على النحو الآتي:

$$A(x) = \text{"اسم الولد } x \text{ هو عمرو"}،$$

$$B(x,y) = \text{"}x=y\text{"}$$

أي أن قيمة الصدق لـ  $B(x,y)$  تكون "صدق"، فقط عندما يكون  $x$  و  $y$  هما نفس الطالب.

إذا كان  $x$  و  $y$  يمثلان طالبين في الصف، فالجملة الآتية تعني أن اسم  $x$  هو عمرو، واسم  $y$  هو عمرو، بحيث أن  $x$  و  $y$  ليسا نفس الطالب:

$$A(x) \wedge A(y) \wedge (\neg B(x,y))$$

يوجد في الصف طالبان، على الأقل، اسمهما عمرو إذا وُجِدَ أن الطالب  $x$  والطالب  $y$  يحققان الجملة الأخيرة، أي:

$$\exists x \exists y (A(x) \wedge A(y) \wedge (\neg B(x,y)))$$

29 بمساعدة  $A(x)$  و  $B(x,y)$  المسجلة أعلاه، اكتبوا بلغة حساب القضايا الجملة الآتية: "يوجد في الصف ثلاثة طلاب، على الأقل، اسمهم عمرو". انتبهوا إلى أن عليكم الاستعانة بثلاثة متغيرات  $x$ ،  $y$ ،  $z$  لوصف الطلاب الثلاثة.

## 7.4. "يوجد طالب واحد، على الأكثر..."

عندما تكون القضية  $A(x)$  = "يوجد للطالب  $x$  شعر أشقر"، ومجال تعريف  $x$  هو طلاب الصف، تكون القضية  $\exists x(A(x))$  = "يوجد طالب واحد، على الأقل، في الصف شعره أشقر". كيف سنكتب أنه يوجد على الأكثر طالب واحد في الصف شعره أشقر؟ لنتمتع في الحوار الآتي بين الأب ورناء، الذي تحاول رناء من خلاله أن تفسر لأبيها كيفية كتابة هذه القضية.

رناء: إذا كان هناك على الأكثر طالب واحد شعره أشقر، لا يمكن أن يكون في الصف طالبان لهما شعر أشقر. لذلك، إذا أشرت إلى طالب أشقر وأنا أشرت إلى طالب أشقر – فنحن نشير إلى الطالب نفسه!

الأب: حسناً.

رناء: سنستعين بالجملة  $B(x,y)$  التي عرفناها مسبقاً وتعني " $x=y$ ". مجال تعريف  $x$  و  $y$  هو كل طلاب الصف. المتغير  $x$  يمثل الطالب الذي أشرت إليه، والمتغير  $y$  يمثل الطالب الذي أشرت أنا إليه. القضية الآتية تعني أنه إذا كان  $x$  و  $y$  أشقران، فهما يعبران عن طالب واحد:

$$(A(x) \wedge A(y)) \rightarrow B(x,y)$$

والقضية الآتية تعني أن الطالبين اللذين نشير إليهما – إن كان كلاهما أشقر – فهما طالب واحد، وهذا الأمر يحدث فقط عندما يكون في الصف طالب واحد أشقر، على الأكثر.

$$\forall x \forall y ( (A(x) \wedge A(y)) \rightarrow B(x,y) )$$

الأب: أظن أننا نستطيع كتابة هذه القضية بطريقة أخرى: لنفرض أنه يوجد على الأكثر طالب أشقر واحد. إذا أشرت أنا إلى طالب  $x$  أشقر وأشرت أنت إلى طالب  $y$  آخر، فإن الطالب  $y$  الذي أشرت أنت إليه ليس أشقر.

رناء: هذا تحليل منطقي جداً.

الأب: في لغة حساب القضايا، الجملة التي قلتها هي:

$$(A(x) \wedge (\neg B(x,y))) \rightarrow (\neg A(y))$$

ما يعني أنه يوجد في الصف على الأكثر طالب واحد أشقر:

$$\forall x \forall y ( (A(x) \wedge (\neg B(x,y))) \rightarrow (\neg A(y)) )$$

30 سنرى في هذا التمرين أنّ في الإمكان كتابة القضية "يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد" على النحو الآتي:

$$\forall x \forall y ( B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))) )$$

أ. اكتبوا بالكلمات معنى التعبير  $B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))$ :

---



---



---

ب. فسّروا لماذا القضية  $\forall x \forall y ( B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))) )$  تعني أنّه يوجد في الصفّ على الأكثر طالب أشقر واحد.

---



---



---

31 سنكتب في هذا التمرين بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن". نلاحظ أنّ القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن" مكافئة للقضية "يوجد دولة واحدة، على الأقل، عاصمتها لندن؛ وأيضا دولة واحدة، على الأكثر، عاصمتها لندن".

$$D(x) = \text{"عاصمة الدولة } x \text{ هي لندن"}$$

أ. مجال تعريف  $x$  هو:

---

ب. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، على الأقل، عاصمتها لندن":

---

ت. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، على الأكثر، عاصمتها لندن"، استعملوا القضية  $"x=y" = B(x,y)$

---

ث. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن":

---

## 7.5. "كل طالب في الصف يعرف طالبًا في الصف المقابل"

في جميع القضايا التي كتبت حتى الآن ظهر التعبير الكمي "لكل" (ربما مرات عديدة) أو التعبير الكمي "يوجد" (ربما مرات محدودة). سنشاهد الآن كيف يمكننا استعمال هذين التعبيرين الكميّين في كتابة القضية "كل طالب في الصف يعرف طالبًا في الصف المقابل".

توجد طريقة إضافية لكتابة القضية. نُشير إلى  $x$  على النحو الآتي:

$$C(x) = \text{"الطالب } x \text{ يعرف طالبًا في الصف المقابل"}$$

إذا كان مجال تعريف  $x$  هو كل طلاب الصف، تكون القضية على النحو الآتي:

$$\forall x(C(x))$$

ما يعني أن كل طالب في الصف يعرف طالبًا في الصف المقابل.

توجد طريقة إضافية لكتابة القضية. يكون ذلك على النحو الآتي:

$$D(x,y) = \text{الطالب } x \text{ يعرف الطالب } y$$

إذا كان مجال تعريف  $x$  هو "كل طلاب الصف" ومجال تعريف  $y$  هو "كل طلاب الصف المقابل"، تكون القضية على النحو الآتي:

$$\forall x \exists y(D(x,y))$$

ما يعني أن "كل طالب في الصف يعرف على الأقل طالبًا واحدًا من الصف المقابل".

32 لنتمعن في القضية "يوجد لكل طالب أب وأم". فلنفترض أن

$$A(x,y) = \text{"} y \text{ هو أب } x \text{"}$$

$$B(x,z) = \text{"} z \text{ هي أم } x \text{"}$$

أ. اكتبوا مجال تعريف المتغيرات  $x$ ،  $y$ ،  $z$ :

مجال تعريف  $x$ :

مجال تعريف  $y$ :

مجال تعريف  $z$ :

ب. اكتبوا القضية "يوجد لكل طالب أب وأم" بواسطة  $A(x,y)$  والتعبير الكمي  $\forall$ ،  $\exists$ .

ت. اكتبوا القضية "يوجد لكل طالب أم" بواسطة  $B(x,z)$  والتعبير الكمي  $\exists, \forall$ .

ث. اكتبوا القضية "يوجد لكل طالب أب وأم" بواسطة  $A(x,y), B(x,z)$  والتعبير الكمي  $\exists, \forall$ . انتبهوا إلى أن عليكم استعمال التعبير الكمي  $\exists$  مرتين.

33 لنتمتع في القضية:  $D = \text{"لكل طالب يوجد صديق اسمه يوسف"}$ .

فلنفترض أن:

$A(x) = \text{"اسم } x \text{ هو يوسف"}$ ,

$B(x,y) = \text{"الطالب } x \text{ هو صديق الطالب } y"$ .

أ. مجال تعريف  $x$ :

ب. مجال تعريف  $y$ :

ت. اكتبوا القضية  $D$  بواسطة  $A(x), B(x,y)$  والتعبير الكمي  $\exists, \forall$ :



لنتمن في القضية:  $D = \text{"لكل طالب اسمه عادل يوجد صديق اسمه سيف"}$ .  
فلنفترض أن:

$$A(x) = \text{"اسم } x \text{ هو عادل"}،$$

$$B(y) = \text{"اسم } y \text{ هو سيف"}،$$

$$C(x,y) = \text{"الطالب } y \text{ هو صديق الطالب } x$$

نريد كتابة القضية  $D$  بلغة حساب القضايا بواسطة  $A(x)$ ،  $B(y)$ ،  $C(x,y)$ . كيف سيتم ذلك؟ سنستعين بمتغيرين:  $x$  الذي يمثل الطالب الذي نتحدث عنه، و  $y$  الذي يمثل صديقه. من هنا نرى أن مجال تعريف  $x$  و  $y$  هو "كل الطلاب في العالم". مفهوم أن علينا بدء القضية  $D$  بـ  $\forall x$ ، أي "لكل طالب"، ولكن كيف نواصل؟

من أجل ذلك نحتاج إلى إيجاد نص مختلف قليلاً للقضية  $D$  يكون معناه شبيهاً بالنص الأصلي للقضية ويمكن كتابته بلغة حساب القضايا. يمكن كتابة القضية  $D$  بطريقة مختلفة، على النحو الآتي: "لكل طالب، إن كان اسمه عادل، صديق اسمه سيف". لذلك، إحدى الطرق لتمثيل القضية  $D$  بلغة حساب القضايا هي:

$$\forall x ((\neg A(x)) \vee \exists y (B(y) \wedge C(x,y)))$$

نص مكافئ إضافي للقضية  $D$  هو "لكل طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف". سنفحص إن كان هذا النص مكافئ للنص الأصلي للقضية "لكل طالب اسمه فادي يوجد صديق اسمه سيف". لذلك، سنتمن في الجملة "لكل طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف". إذا كان اسم الطالب هو فادي، فإن القسم الأول من الجملة (أو اسمه ليس فادي) لا يتحقق. ولذلك فإن جدول الصدق للقضية المركبة "أو" يلزمنا بتحقيق القسم الثاني. أي، يوجد للطالب صديق اسمه سيف. إن لم يكن اسم الطالب فادي، فإن القسم الأول من الجملة يتحقق، وعندها لا يلزمنا جدول الصدق للقضية المركبة "أو" بتحقيق القسم الثاني: قد يكون أو قد لا يكون هناك صديق اسمه سيف. من هنا ينتج أن القضية "لكل طالب، اسمه ليس فادي، أو له صديق اسمه سيف"، تكون بالفعل مكافئة للقضية "لكل طالب اسمه فادي يوجد صديق اسمه سيف". بكلمات أخرى، القضية  $D$  يمكن كتابتها بالطريقة التالية:

$$\forall x ((\neg A(x)) \vee \exists y (B(y) \wedge C(x,y)))$$

34 لنتمن في القضية:  $D = \text{"لكل طالب اسمه ليس سيف يوجد صديق اسمه سيف"}$ .

فلنفترض أن:

$$A(x) = \text{"اسم } x \text{ هو سيف"}،$$

$$C(x,y) = \text{"الطالب } y \text{ هو صديق الطالب } x$$

اكتبوا القضية  $D$  بواسطة  $A(x)$ ،  $B(y)$ ، والتعبير الكمي  $\forall$  و  $\exists$  ورموز منطق إضافية. يمكن الاستعانة بمتغيرات إضافية. انتبهوا إلى أنه يجب استعمال  $A(x)$  مرتين!

35 مجال تعريف المتغير  $x$  هو "كل البنين في الصف"، ومجال تعريف المتغير  $y$  هو "كل البنات في الصف". مجال تعريف المتغير  $z$  هو "طلاب الصف (بنين وبنات)".

فلنفترض أن:

$$D(z) = \text{"الطالب } z \text{ يوجد بلوزة حمراء"}$$

$$C(z) = \text{"الطالب } z \text{ يحب لعب كرة القدم"}$$

اكتبوا القضايا الآتية بواسطة  $D(x)$ ،  $D(y)$ ،  $C(x)$ ،  $C(y)$  وروابط منطق أخرى. قد تحتاجون إلى استعمال متغيرات أخرى.

أ. "كل البنين في الصف يحبون لعب كرة القدم، ويوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ب. "كل البنات في الصف تحب لعب كرة القدم، ولا يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ت. "إذا كان كل البنين في الصف يحبون لعب كرة القدم، فإنه يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

ث. "إذا كان في الصف بنتان تحبان لعب كرة القدم، فإنه يوجد في الصف اثنتان من البنين يرتديان بلوزة حمراء":  
استعملوا في القضية  $y=x = B(x,y)$ . علينا في هذا التمرين استعمال متغيرين مختلفين يمثلان بنات، ومتغيرين مختلفين يمثلان بنين. المتغيران اللذان يمثلان البنات هما  $y_1$  و  $y_2$  والمتغيران اللذان يمثلان البنين هما  $x_1$  و  $x_2$ .

## 7.6 روابط بين التعبيرين الكميّين "لكلّ" و "يوجد"

سنلاحظ في هذا البند أنّ التعبيرين الكميّين، "لكلّ" و "يوجد"، متعلقان ببعضهما البعض، ويمكن التعبير عن كلّ واحد منهما بواسطة الآخر. لننمّن في القضية الآتية:

$$A = \text{"يوجد لكلّ طالب في الصف كلب"}$$

من هنا، تكون القضية  $A = \forall x(B(x))$  صحيحة، عندما يكون مجال تعريف المتغير  $x$  هو طلاب الصف و

$$B(x) = \text{"الطالب } x \text{ يوجد كلب"}$$

إذا كانت القضية  $A$  غير صحيحة، فمؤكد أنه يوجد طالب في الصف لا يوجد لديه كلب. بمعنى، يوجد طالب في الصف بالنسبة له القضية  $B(x)$  غير صحيحة. بكلمات أخرى، إذا كانت القضية  $A$  غير صحيحة، تكون عندها القضية  $\exists x(\neg B(x))$  صحيحة! نلخص ذلك:

$$\text{القضية } \neg(\forall x(B(x))) \text{ مكافئة للقضية } \exists x(\neg B(x))$$

36 فلنفترض أنّ  $B(x) = \text{"يوجد للولد } x \text{ أخت اسمها حلا"}$ ؛ مجال تعريف  $x$  هو "أولاد الصف".

أ. اكتبوا المعنى الكلامي للقضية  $\neg(\exists x(B(x)))$ :

ب. اكتبوا المعنى الكلامي للقضية  $\forall x(\neg B(x))$

ت. فسّروا لماذا القضية  $\neg(\exists x(B(x)))$  مكافئة للقضية  $\forall x(\neg B(x))$ .

## 8. الإجمال

تعلمنا في هذه الكراسة لغة حساب القضايا، وهي لغة تمكننا من كتابة الجمل الواضحة التي لا يوجد عليها خلاف. عرفنا قيمة الصدق للقضية، وتعلمنا أن القضية قد تكون صحيحة أو غير صحيحة. رأينا كيف يمكن استنتاج قيمة الصدق لقضية مركبة من قيم الصدق للقضايا النواتية (الأساس) التي تركبها، وكيف يمكننا صياغة ادعاءات منطقية وإثبات صحتها.

لغة حساب القضايا هي مدخل أول إلى المجال الغني في المنطق الرياضي، الذي يبحث في مواضيع متنوعة.

- في حساب القضايا، يمكن للجمل أن تكون صحيحة أو غير صحيحة، لذلك نستخدم لغة تتطوي على منطق يكون ثنائي القيم: تكون قيمة الصدق لقضية ما إحدى قيمتين – صدق أو كذب. يوجد منطق متعدد القيم يمكن تطبيقه على جمل تتطوي على قيم إضافية. على سبيل المثال، في المنطق الثلاثي القيم يمكن للجمل أن تكون صحيحة، غير صحيحة أو ذات قيم صدق غير معروفة.

- رأينا كيف يمكن برهنة ادعاءات بواسطة قواعد الاستنتاج. أحد الأسئلة الهامة في المجال هو ما إذا كان في الإمكان برهنة صحة أو عدم صحة كل ادعاء. أي، هل يمكن، بالنسبة لكل ادعاء يخطر في البال، بناء جدول يضم قواعد استنتاج نتعلم منها، أو إيجاد مثال لقيم صدق تضم متغيرات تكونها من غير أن تتحقق. تنص الجملة المعروفة في هذا المجال على أنه عندما تكون اللغة التي نستعملها غنية بما فيه الكفاية، فهناك قضية لا نستطيع برهان صحتها أو عدم صحتها.

نرجو أن تكون الكراسة قد نالت اهتمامكم وأن تتابعوا قراءة الكراريس التابعة لنفس السلسلة، يمكن إيجاد كراريس إضافية في موقع الانترنت الخاص بنا وعنوانه [goodtoknow.tau.ac.il](http://goodtoknow.tau.ac.il).

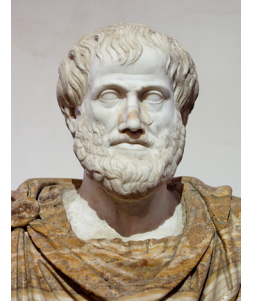


## 9. تلخيص المصطلحات والتعاريف

1. القضية هي جملة تُعبّر عن حقيقة يمكن أن تكون صحيحة أو غير صحيحة.
2. قيمة الصدق لقضية هي "صدق" إن كانت القضية صحيحة، وهي "كذب" إن كانت القضية غير صحيحة.
3. "الطوطولوجيا" هي قضية صحيحة في كلّ حالة: قيمة الصدق لها دائماً "صدق".
4. التناقض هو قضية غير صحيحة في كلّ حالة: قيمة الصدق لها دائماً "كذب".
5.  $\neg A$ : "A غير صحيح".
6.  $A \wedge B$ : "A وأيضاً B".
7.  $A \vee B$ : "A أو B".
8.  $A \rightarrow B$ : "A يؤدي الى B" أو "إذا A صحيح فإن B صحيح".
9. قضية نواتية هي قضية تحوي حرفاً واحداً فقط - A، B، C وهكذا.
10. قضية مركبة هي قضية تحوي واحداً، على الأقل، من الرموز الآتية:  $\neg$ ،  $\vee$ ،  $\rightarrow$ ،  $\wedge$ ،  $\exists$ .
11. جدول الصدق لقضية هو جدول يربط بين قيمة الصدق للقضايا النواتية التي تكون القضية وبين قيمة الصدق لكل القضية.
12. قضيتان اثنتان تدعيان متكافئتين إذا كان لهما نفس جدول الصدق.
13. قاعدة الاستنتاج الإيجابي: إذا كانت القضية A صحيحة والقضية  $A \rightarrow B$  صحيحة، فإن القضية B صحيحة، أيضاً.
14. قاعدة الاستنتاج السلبي: إذا كان القضية  $A \rightarrow B$  صحيحة والقضية B غير صحيحة، فإن القضية A غير صحيحة، أيضاً.
15. قاعدة الاستنتاج "وأيضاً": إذا كانت القضية  $A \wedge B$  صحيحة، فإن القضية A صحيحة، أيضاً.
16. قاعدة الاستنتاج "أو" السلبي: إذا كانت القضية  $A \vee B$  صحيحة والقضية A غير صحيحة، فإن القضية B صحيحة.
17. مجال التعريف لمتغير هو مجموعة القيم التي يستطيع المتغير أن يأخذها.
18.  $\forall x(C(x))$ : لكل x تتحقق القضية C(x).
19.  $\exists x(C(x))$ : يوجد x تتحقق به القضية C(x).

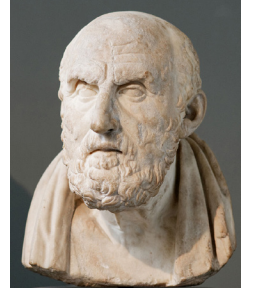
## 10. شخصيات ذكرت في الكراسة

**"أرسطو"** (384–322 قبل الميلاد) كان من عظماء الفلاسفة في العصر القديم. بالإضافة إلى المنطق، طوّر "أرسطو" مجال العلوم السياسيّة: فقد ميّز طرق حكم جيدة (مفيدة) (الملكية، الأرستقراطية، وحكم أصحاب الأملاك) وطرق حكم سلبية (الديكتاتورية، سيطرة الأغنياء، والديمقراطية) وادعى انهما تبدلان بعضهما البعض بشكل دوري. كذلك، ساهم "أرسطو" في مجالات العلم وكتب عن الفيزياء، والبيولوجيا، وعلم الفلك، وعلم الكون.



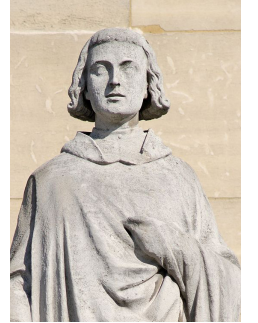
(المصدر: ويكيبيديا، مفتوح للاستعمال)

**"كريسفيوس"** (280–205 قبل الميلاد) كان فيلسوفًا يونانيًا. طور الأفكار التي تقف خلف حساب القضايا وقواعد الاستنتاج المعروضة في هذه الكراسة. قال إنّ الكون هو الروح، والدماغ المسيطر على ذاته، وادعى وجود روح لكل شيء في الطبيعة.



(المصدر: ويكيبيديا، مفتوح للاستعمال)

**"بيير البراد"** (1079–1142) كان فيلسوفًا وباحثًا في الدين من أصل فرنسي. طور طريقة البرهان الرسمية. تشاجر مع معلمه ومع متعلمين آخرين. حُكم عليه من قبل الكنيسة وعوقب بالعيش في دير. مع كل هذا بقي معلمًا محبوبًا (شعبيًا). استقطبت محاضراته الكثير من الطلاب.



(المصدر: ويكيبيديا، مفتوح للاستعمال، مع ذكر حقوق المنتجين على الصورة: Marie-Lan Nguyen).

## 11. حلول التمارين

1

| الجملة                                            | قضية | ليست قضية |
|---------------------------------------------------|------|-----------|
| 1 التقيتُ دنيا البارحة.                           | X    |           |
| 2 ماذا تريد؟                                      |      | X         |
| 3 انا أحب اللّبن.                                 | X    |           |
| 4 أنا أحب اللّبن وأنت تحبّ البيّزا.               | X    |           |
| 5 لا، تحت أيّ ظرف!                                |      | X         |
| 6 قالت أميرة: " لا، تحت أيّ ظرف!"                 | X    |           |
| 7 كلّ الأولاد في الصفّ قالوا: " لا، تحت أيّ ظرف!" | X    |           |
| 8 متى رأيت المعلّمة؟                              |      | X         |
| 9 يوجد طالب في الصف يدعى ربيع.                    | X    |           |
| 10 أنت تقول الحقيقة أو تكذب.                      | X    |           |
| 11 إذا ضحكت سأحضنك.                               | X    |           |
| 12 شكرًا لحضورك حفلاتي.                           |      | X         |

2

نرمز لـ  $A$  = "يوجد لدي قلم رصاص أحمر"، $B$  = "يوجد لدي مقلّمة خضراء"، $C$  = "يوجد لدي حقيبة بنفسجية".اكتبوا القضايا الآتية بواسطة الرموز  $A, B, C, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ .أ. لديّ قلم أحمر ومقلّمة خضراء.  $A \wedge B$ ب. ليس لديّ مقلّمة بنفسجية.  $\neg C$ ت. لديّ مقلّمة خضراء أو لديّ قلم رصاص أحمر.  $B \vee A$ ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجية فإنّ لديّ مقلّمة خضراء.  $C \rightarrow B$ 

3

القضايا التي ظهرت في تمرين 2 كانت:  $A$  = " لديّ قلم رصاص أحمر"، $B$  = " لديّ مقلّمة خضراء"، $C$  = " لديّ مقلّمة خضراء".سجّلوا القضايا الآتية بواسطة الرموز  $A, B, C, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  ورمز الأقواس (و).أ. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلّمة خضراء، وليس لديّ حقيبة بنفسجية.  $A \wedge B \wedge (\neg C)$ ب. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلّمة خضراء، وليس لديّ حقيبة بنفسجية.  $\neg(C \wedge B)$ ت. لديّ قلم رصاص أحمر ومقلّمة خضراء، وليس لديّ حقيبة بنفسجية.  $(\neg B) \vee (A \wedge B)$ ث. إذا كان لديّ حقيبة بنفسجية فإنّه ليس لديّ مقلّمة خضراء.  $C \rightarrow (\neg B)$ ج. إذا لم يكن لديّ حقيبة بنفسجية فإنّه ليس لديّ مقلّمة خضراء.  $(\neg C) \rightarrow B$ ح. ليس لديّ حقيبة بنفسجية، ليس لديّ مقلّمة خضراء ويوجد لديّ قلم رصاص أحمر.  $(\neg C) \wedge (\neg B) \wedge A$

4

القضايا التي ظهرت في التمرينين 2 و 3 كانت:  $A =$  "الذي قلم رصاص أحمر"،  
 $B =$  "الذي مقلمة خضراء"،  
 $C =$  "الذي حقيبة بنفسجية".

اكتبوا المعنى الكلامي لهذه القضايا:

- أ.  $AV(\neg C)$ : يوجد لدي قلم رصاص أحمر ولا يوجد لدي حقيبة بنفسجية.  
 ب.  $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg C)$ : إن كان لدي قلم رصاص أحمر ولم يكن لدي مقلمة خضراء، فإنه يوجد لدي حقيبة بنفسجية.  
 ت.  $(\neg A) \wedge (\neg C)$ : لا يوجد لدي قلم رصاص أحمر ولا يوجد لدي حقيبة بنفسجية.  
 ث.  $(C \vee (\neg B)) \wedge ((\neg C) \vee A)$ : يوجد لدي حقيبة بنفسجية أو ليس لدي مقلمة خضراء، وأيضًا لا يوجد لدي حقيبة بنفسجية أو يوجد لدي قلم رصاص أحمر.

5

قرروا ما إذا كانت قيمة الصدق في كل واحدة من القضايا تناسب فئة "صدق" أو "كذب". انتبهوا إلى أن تحديد قيمة الصدق للقضية يتعلّق بالشخص الذي تتحدّث عنه القضية في اللحظة الزمنية التي دُكرت فيها القضية. لذلك، فإنّ البندين 2 و 4 للتمرين يتعلّقان بكم أنتم: سواء أكنتم في صفّكم أو بين أفراد عائلتكم. يُمكن اعتبار هذه الملاحظة سارية أيضًا بالنسبة لكلّ التمارين الآتية في الكراس.

| القضية                                                   | صدق | كذب |
|----------------------------------------------------------|-----|-----|
| 1 رئيس الحكومة الأوّل لدولة إسرائيل كان دافيد بن غوريون. | X   |     |
| 2 في كلّ يوم ثلاثاء تحصل مربّيتي على يوم إجازة.          |     |     |
| 3 $6=5+1$                                                | X   |     |
| 4 لوالديّ يوجد ثلاثة أولاد.                              |     |     |
| 5 لكلّ إنسان يوجد ثلاثة أولاد بالضبط.                    |     | X   |

قيمة الصدق في البنود 2 و 4 يمكن أن تكون صدق أو كذب، حسب المتحدث.

6

لكلّ واحدة من القضايا – اكتبوا إذا كانت القضية "طوطولوجيا"، تناقض، أو لا هذه ولا تلك.

| قضية                                            | "طوطولوجيا" | تناقض | لا هذه ولا تلك |
|-------------------------------------------------|-------------|-------|----------------|
| 1 أنا إنسان.                                    | X           |       |                |
| 2 أنا إنسان أو أنا حلزون.                       | X           |       |                |
| 3 ليس صحيحًا أنني إنسان.                        |             | X     |                |
| 4 ليس صحيحًا أنه من غير صحيح أنني إنسان.        | X           |       |                |
| 5 الشباك مفتوح، أو الشباك مغلق والستارة مفتوحة. |             |       | X              |
| 6 $10 < 5$ .                                    |             | X     |                |
| 7 $10 > 5$ .                                    | X           |       |                |
| 8 الشكل الرباعيّ هو مضلّع له أربعة أضلاع.       | X           |       |                |

7 اكتبوا قضيتي "طوطولوجيا" اثنتين، وقضيتين متناقضتين:

"طوطولوجيا": أ. أنا احبك أو أنا لا أحبك.

ب. في كل مرة يخرج فيها أحدهم من البحر مرتدياً ملابس السباحة فقط يكون مبلولاً.

"متناقضات": أ. غداً ستشرق الشمس من الغرب.

ب. هذا شكل رباعي له خمسة أضلاع.

8 هذا الجدول هو جدول صدق للقضية  $A \vee B$ ، أكملوه!

| $A \vee B$ | B | A |
|------------|---|---|
| T          | T | T |
| T          | F | T |
| T          | T | F |
| F          | F | F |

9 عبئوا جدول الصدق للقضية  $(B \vee (\neg A)) \wedge (\neg B)$ .

| $(B \vee (\neg A)) \wedge (\neg B)$ | $B \vee (\neg A)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | B | A |
|-------------------------------------|-------------------|----------|----------|---|---|
| F                                   | T                 | F        | F        | T | T |
| F                                   | F                 | T        | F        | F | T |
| F                                   | T                 | F        | T        | T | F |
| T                                   | T                 | T        | T        | F | F |

10 عبئوا جدول الصدق للقضية  $(C \wedge (\neg A)) \vee ((\neg B) \wedge A)$ .

| $(C \wedge (\neg A)) \vee ((\neg B) \wedge A)$ | $(\neg B) \wedge A$ | $C \wedge (\neg A)$ | $\neg B$ | $\neg A$ | C | B | A |
|------------------------------------------------|---------------------|---------------------|----------|----------|---|---|---|
| F                                              | F                   | F                   | F        | F        | T | T | T |
| F                                              | F                   | F                   | F        | F        | F | T | T |
| T                                              | T                   | F                   | T        | F        | T | F | T |
| T                                              | T                   | F                   | T        | F        | F | F | T |
| T                                              | F                   | T                   | F        | T        | T | T | F |
| F                                              | F                   | F                   | F        | T        | F | T | F |
| T                                              | F                   | T                   | T        | T        | T | F | F |
| F                                              | F                   | F                   | T        | T        | F | F | F |

11 عبّروا جدول الصدق للقضية  $(A \rightarrow (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee C)$ .

| $(A \rightarrow (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee C)$ | $(\neg B) \vee C$ | $A \rightarrow (\neg C)$ | $\neg C$ | $\neg B$ | C | B | A |
|-----------------------------------------------------|-------------------|--------------------------|----------|----------|---|---|---|
| F                                                   | T                 | F                        | F        | F        | T | T | T |
| F                                                   | F                 | T                        | T        | F        | F | T | T |
| F                                                   | T                 | F                        | F        | T        | T | F | T |
| T                                                   | T                 | T                        | T        | T        | F | F | T |
| T                                                   | T                 | T                        | F        | F        | T | T | F |
| F                                                   | F                 | T                        | T        | F        | F | T | F |
| T                                                   | T                 | T                        | F        | T        | T | F | F |
| T                                                   | T                 | T                        | T        | T        | F | F | F |

12 أي من بين القضيتين التاليتين هي "طوطولوجيا"، أيها تناقض وأيها ليست طوطولوجيا وليست تناقض؟ يمكن الاستعانة بالجدول الذي يظهر بعد التمرين. بعد تعبئة الجدول، تكون القضية التي يلائمها العمود الذي يحوي الرمز T مرتين هي قضية "طوطولوجيا"، في حين أن القضية التي يلائمها العمود الذي يحوي الرمز F مرتين هي تناقض، والقضية التي يلائمها العمود الذي يحوي T وأيضًا F ليست قضية طوطولوجيا وليست قضية تناقض.

| قضية                   | طوطولوجيا | تناقض | ليست "طوطولوجيا" وليست تناقض |
|------------------------|-----------|-------|------------------------------|
| أ. A                   |           |       | X                            |
| ب. $A \vee (\neg A)$   | X         |       |                              |
| ت. $A \vee A$          |           |       | X                            |
| ث. $A \wedge (\neg A)$ |           | X     |                              |

13 أي من القضايا الآتية يُعتبر قضية طوطولوجيا، أيها تناقضات وأيها ليست طوطولوجيا وليست تناقضات؟ يمكن الاستعانة بالجدول الذي يظهر بعد التمرين.

| قضية                                                            | طوطولوجيا | تناقض | ليست "طوطولوجيا" وليست تناقض |
|-----------------------------------------------------------------|-----------|-------|------------------------------|
| أ. $A \vee B$                                                   |           |       | X                            |
| ب. $A \vee (A \rightarrow B)$                                   | X         |       |                              |
| ت. $((\neg B) \rightarrow A) \wedge ((\neg A) \wedge (\neg B))$ |           | X     |                              |
| ث. $(A \wedge (\neg B)) \rightarrow (\neg A)$                   |           |       | X                            |

14 اكتبوا قضية يلائمها جدول الصدق الآتي:

| قضية | B | A |
|------|---|---|
| T    | T | T |
| F    | F | T |
| T    | T | F |
| T    | F | F |

القضية هي:  $(\neg A) \vee B$ .

15 ما هي أزواج القضايا المتكافئة في الجدول؟ يمكنكم الاستعانة بالجدول في نهاية التمرين.

| غير متكافئة | متكافئة | القضية الثانية               | القضية الأولى         |    |
|-------------|---------|------------------------------|-----------------------|----|
| X           |         | $A \vee B$                   | $A \wedge B$          | 1. |
|             | X       | $(\neg A) \vee (A \wedge B)$ | $A \rightarrow B$     | 2. |
|             | X       | A                            | $\neg(\neg A)$        | 3. |
|             | X       | $A \vee (\neg A)$            | $A \rightarrow A$     | 4. |
|             | X       | B                            | $B \wedge (B \vee A)$ | 5. |

16 هل القضية  $(A \wedge B) \rightarrow (\neg C)$  مكافئة للقضية  $(A \wedge C) \rightarrow B$ ؟ لا، لأن جدول الصدق الخاص بهما مختلف، كما نلاحظ في الجدول الآتي:

| $(A \wedge C) \rightarrow B$ | $A \wedge C$ | $(A \wedge B) \rightarrow (\neg C)$ | $A \wedge B$ | $\neg C$ | C | B | A |
|------------------------------|--------------|-------------------------------------|--------------|----------|---|---|---|
| T                            | T            | F                                   | T            | F        | T | T | T |
| T                            | F            | T                                   | T            | T        | F | T | T |
| F                            | T            | T                                   | F            | F        | T | F | T |
| T                            | F            | T                                   | F            | T        | F | F | T |
| T                            | F            | T                                   | F            | F        | T | T | F |
| T                            | F            | T                                   | F            | T        | F | T | F |
| T                            | F            | T                                   | F            | F        | T | F | F |
| T                            | F            | T                                   | F            | T        | F | F | F |

17 بجانب الحالات المذكورة في الجدول، اكتبوا إن كان الشرط هو شرط كافٍ وغير ضروري، شرط ضروري وغير كافٍ، أو شرط ضروري وكافٍ للدعاء.

| الشرط                       | الاستنتاج                  | شرط ضروري | شرط كافٍ |
|-----------------------------|----------------------------|-----------|----------|
| اليوم يوم الثلاثاء          | غداً يوم الأربعاء          | نعم       | نعم      |
| يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع | هذا الشكل هو مربع          | نعم       | نعم      |
| يوجد لهذا الشكل أربعة أضلاع | هذا الشكل هو شكل رباعي     | نعم       | نعم      |
| سألعب كرة قدم               | سأسدد هدفاً في المرمى      | نعم       | لا       |
| هذا المخلوق من الثدييات     | هذا المخلوق هو إنسان       | نعم       | لا       |
| هذا المخلوق هو إنسان        | هذا المخلوق من الثدييات    | لا        | نعم      |
| رؤوف هو أخي                 | رؤوف هو ولد ولنا أبٌ مشترك | نعم       | نعم      |

18 يخبر طارق صديقه فادي: "في كلّ مرة أزور فيها بيت خالتي عبيير نلعب الشطرنج، وفي كلّ مرّة نلعب فيها الشطرنج تفوز عبيير. في يوم السبت السابق لم تفز عبيير في الشطرنج". "إن كان الأمر كذلك" يقول فادي، "فأنت لم تزر خالتك عبيير". في هذا التمرين سنسجل القواعد التي استعان بها فادي للتوصل إلى الاستنتاج بأن طارق لم يزر خالته عبيير.

أ. اكتبوا بالكلمات القضايا التي يصفها طارق في قصته.

$A = \text{أزور بيت خالتي عبيير.}$

$B = \text{أنا وعبيير نلعب الشطرنج.}$

$C = \text{تفوز عبيير في الشطرنج.}$

ب. اكتبوا بلغة حساب القضايا، القضايا التي صرح طارق أنها صحيحة.

$A \rightarrow B, C \rightarrow B, \neg C$

ت. اكتبوا كلّ قوانين الاستنتاج التي استعان بها فادي للتوصل إلى الاستنتاج بأن طارق لم يزر خالته عبيير، وكلّ ما استنتجه من قاعدة الاستنتاج.

من القضايا  $B \rightarrow C, \neg C$  ومن قاعدة الاستنتاج السليبي استنتج فادي أن القضية  $\neg B$  صحيحة، أي أنه أنا وعبيير لم نلعب الشطرنج يوم السبت.

من القضايا  $A \rightarrow B, \neg B$  ومن قاعدة الاستنتاج السليبي استنتج فادي أن القضية  $\neg A$  صحيحة: يوم السبت لم أزر عبيير.

19 فسّروا لماذا تتحقّق قاعدة الاستنتاج "إذا كانت القضية  $A$  صحيحة فإن القضية  $A \vee B$  صحيحة".

يمكن الاستعانة بجدول الصدق للقضية  $A \vee B$  الموجود في الأعلى.

في جميع أسطر جدول الصدق  $A \vee B$  التي تكون فيها قيمة الصدق للقضية  $A$  هي  $T$ ، تكون قيمة الصدق أيضاً للقضية  $A \vee B$  هي  $T$ .

20 فسّروا لماذا تتحقّق قاعدة الاستنتاج: "إذا  $A \rightarrow B$  غير صحيحة فإن  $B$  غير صحيحة". يمكن الاستعانة بجدول الصدق للقضية

$A \rightarrow B$ .

يوجد سطر واحد في جدول الصدق للقضية  $A \rightarrow B$  التي فيها قيمة الصدق للقضية هي  $F$ . في هذا السطر، قيمة الصدق للقضية  $B$  هي  $F$ ، أيضاً. لذلك، إذا كانت القضية  $A \rightarrow B$  غير صحيحة، فمن المؤكد أيضاً أن القضية  $B$  غير صحيحة.

## 21 لنتمتع في الحوار بين جود وأمه:

جود: لو كان معي نقود لكنت اشتريت بوظة.

الأم: لو اشتريت بوظة، ستعاني من ألم الأسنان.

جود: ولكن لا يوجد لدي ألم أسنان.

الأم: إذا كان الأمر كذلك، فهذا يعني أنه لم يكن معك نقود.

فلنفترض أن:

$A =$  "كان مع جود نقود".

$B =$  "اشترى جود بوظة"،

$C =$  "يوجد لدى جود ألم أسنان".

أ. اكتبوا برموز رياضية القضية التي يدعي جود بأنها صحيحة.

لو كان معي نقود لا اشتريت بوظة:  $A \rightarrow B$ .

لا يوجد لدي ألم أسنان:  $\neg C$ .

ب. اكتبوا برموز رياضية القضية التي تقول الأم بأنها صحيحة:

لو اشتريت بوظة، لكان لديك ألم أسنان:  $B \rightarrow C$ .

ت. فسروا كيف توصلت الأم إلى أنه لم يكن مع جود نقود.

استعانت الأم مرتين بقاعدة الاستنتاج السليبي. كما نذكر، فإن قاعدة الاستنتاج السليبي تقول أنه إذا كانت القضية  $B \rightarrow A$  صحيحة، وإذا كان  $B$  غير صحيح فإن  $A$  غير صحيح كذلك. إذا استبدلنا بالحرف  $C$  الحرف  $B$  وبالحرف  $B$  الحرف  $A$  فسنوصل إلى أن الاستنتاج السليبي يقول إنه إذا كانت القضية  $C \rightarrow B$  صحيحة وإذا كان  $C$  غير صحيح فإن  $B$  لا يكون صحيحاً كذلك. قررت الأم أن القضية  $C \rightarrow B$  صحيحة، وقررت جود أن القضية  $C$  غير صحيحة، ولذا فإن الاستنتاج السليبي الذي توصلت إليه الأم هو أن القضية  $B$  غير صحيحة. قررت جود أن القضية  $B \rightarrow A$  صحيحة، وبما أن القضية  $B$  غير صحيحة، ينتج أن القضية  $A$  غير صحيحة. أي أن جود لم يمتلك أية نقود.

## 22

قالت رنا لأبيها: "ذهبت الى المدرسة ورأيت صديقتي دنيا. بما أنني ذهبت الى المدرسة، فقد رأيت معلمتي. أنت تعلم أنه إذا كانت المعلمة مريضة، فلن أتمكن من رؤيتها في المدرسة".

"إذا كان الأمر كذلك"، قال الأب، "فإن المعلمة لم تكن مريضة اليوم".

أ. اكتبوا القضايا التي تصفها رنا في قصتها:

$A =$  ذهبت الى المدرسة،

$B =$  رأيت دنيا،

$C =$  رأيت المعلمة،

$D =$  كانت المعلمة مريضة.

ب. اكتبوا بواسطة رموز رياضية القضايا الصحيحة التي صرحت بها رونيت.

$D \rightarrow (\neg C), A \rightarrow C, A \wedge B$

ت. اكتبوا جميع قواعد الاستنتاج التي استعان بها الأب للتوصل إلى الاستنتاج بأن المعلمة لم تكن مريضة، وما استنتجه من كل قواعد الاستنتاج:

بمساعدة قاعدة الاستنتاج "وأيضاً" وبما أن القضية  $A \wedge B$  صحيحة، استنتج الأب أن القضية  $A$  صحيحة: ذهبت الى المدرسة. ومن هنا استنتج أن  $\neg A$  غير صحيحة: ليس صحيحاً أنني ذهبت الى المدرسة.

بمساعدة قاعدة الاستنتاج السليبي وكون  $\neg C$  صحيحاً، استنتج الأب أن  $D$  غير صحيحة، المعلمة لم تكن مريضة.

23 لنتمنَّ في القضية: "يوجد لكلِّ السَّيَّارات في العالم أربعة دواليب".

اعرضوا القضية بلغة حساب القضايا وحددوا مجال تعريف المتغير الذي ستستعملونه.

القضية  $C(x) =$  "للسيارة  $x$  يوجد أربعة دواليب".

مجال تعريف المتغير  $x$ : كل سيارة في العالم.

القضية بلغة حساب القضايا:  $\forall x(C(x))$

24 فلنفترض أنَّ  $B(x) =$  "الطالبة  $x$  وصلت اليوم مرتدية تنورة خضراء"؛ مجال التعريف هو كلُّ طالبات الصف.

اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ.  $B$  (مُنَى): وصلت مُنى اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ب.  $B \neg$  (تالاً): لم تصل تالاً اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ت.  $(\neg B) \wedge (B)$ : وصلت شام اليوم مرتدية تنورة خضراء ولم تصل دينا اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ث.  $(\neg B) \rightarrow (B)$ : إذا وصلت شام اليوم مرتدية تنورة خضراء فإن الطالبة دينا لم تصل اليوم مرتدية تنورة خضراء.

ج.  $\forall x(B(x))$ : وصلت كل طالبات الصف مرتديات تنورة خضراء.

25 لنتمنَّ في القضية:  $E =$  "إذا كان لدى كلِّ طالب في الصف أخوة، عندها سيكون في الإمكان تنظيم لعبة كرة قدم في اليوم الرياضي". فلنفترض أنَّ:

$A(x) =$  "للتالب  $x$  يوجد أخوان"،

$B =$  "في الإمكان تنظيم لعبة كرة قدم في اليوم الرياضي".

أ. مجال تعريف  $x$ : كل طلاب الصف.

ب. اكتبوا القضية  $E$  بواسطة  $A(x)$ ,  $B$ , والتعبير الكمي  $\forall$ : القضية  $B \rightarrow (\forall x(A(x)))$ .

26 فلنفترض أنَّ:

$A(x) =$  "التالب  $x$  حضر اليوم الى المدرسة"،

$B(x) =$  "التالب  $x$  سمع محاضرة عن الإنسان القديم".

مجال تعريف المتغير  $x$  هو مجموعة طُلاب الصف.

اكتبوا المعنى الكلامي للقضايا:

أ.  $\forall x(A(x) \wedge B(x))$ : حضر كل طلاب الصف اليوم الى المدرسة وسمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

ب.  $\forall x(A(x) \vee B(x))$ : حضر كل طلاب الصف اليوم الى المدرسة أو سمعوا محاضرة عن الإنسان القديم.

ت.  $\forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x))$ : حضر كل طلاب الصف اليوم الى المدرسة أو سمع كلُّ طلاب الصف محاضرة عن الإنسان القديم.

ث. اكتبوا حالة تكون فيها قيمة الصدق للقضية في البند (ب) "صدق" وتكون قيمة الصدق للقضية في البند (ت) "كذب". نفرض أنَّ كل طلاب الصف حضروا اليوم إلى المدرسة وأنَّ كل الطالبات سمعن محاضرة عن الإنسان القديم. سنلاحظ أنَّ قيمة الصدق للقضية في البند "ب" هي "صدق"، لأنَّ كلَّ طالب في الصف حضر إلى المدرسة أو سمع محاضرة عن الإنسان القديم. من جهة أخرى، قيمة الصدق للقضية في البند "ت" هي "كذب"، لأن جزئي القضية لا يتحققان: ليس صحيحاً أنَّ كلَّ الطلاب حضروا اليوم إلى المدرسة وليس صحيحاً أنَّ كل الطلاب سمعوا المحاضرة عن الإنسان القديم.

ج.  $\forall x(B(x) \rightarrow (\neg A(x)))$ : كلُّ طالب سمع محاضرة عن الإنسان القديم لم يحضر اليوم الى المدرسة.

27 حدّدوا قيمة الصّدق للقضيّة  $\forall x(A(x))$  في كلّ واحدة من التعريفات المعطاة لـ  $A(x)$ :

| $A(x)$                          | مجال تعريف المتغيّر $x$ | صدق | كذب | أحيانا صدق<br>وأحيانا كذب |
|---------------------------------|-------------------------|-----|-----|---------------------------|
| 1. يوجد للطالب $x$ قلب          | كلّ طلاب الصف           | X   |     |                           |
| 2. يوجد لكلّ دولة رئيس          | كلّ دول العالم          |     | X   |                           |
| 3. $x^2 \geq 0$                 | كلّ الأعداد             | X   |     |                           |
| 4. لا يوجد للطالب $x$ شعر أشقر  | كلّ طلاب الصف           | X   | X   | X                         |
| 5. يوجد لكلّ شخص 3 أولاد بالضبط | كلّ الأشخاص في العالم   |     | X   |                           |

قيمة الصّدق للقضيّة "لا يوجد للطالب  $x$  شعر أشقر" هي صدق في الصفوف التي لا يوجد فيها طالب ليس أشقرًا، وكذب في الصفوف التي فيها الطلاب شقّرون. لذلك جميع الاجابات الثلاث ممكنة. يمكن أن نشير إلى الاجابة "كذب"، وإذا لم يكن في صفكم طالب أشقر، كان بإمكانكم الإشارة الى الاجابة "صدق". إذا فكرتم في الإمكانية أننا فعليا لا نعلم عن أي صف نتحدث، بإمكانكم الإشارة الى الاجابة "أحيانا صدق وأحيانا كذب".

في الاجابة للبند (2) – في عالمنا قيمة الصّدق للقضيّة هي كذب، لأن لبريطانيا، على سبيل المثال، لا يوجد رئيس. ولكن إن تخيلتم عالما فيه لكلّ دولة رئيس، عندها ستكون قيمة الصّدق لهذه القضيّة في هذا العالم "صدق"، عندها ستكون الإجابة "أحيانا صدق وأحيانا كذب". في الواقع هي إجابة متزاكية ولكنها مقبولة. انتبهوا إلى أن التلاميذ الذين كانت إجابتهم متزاكية في البند (2)، عليها أن تكون كذلك في البندين (1) و-(4)، حيث أنّه اذا تمكّنّا من تخيل عالم فيه لكل دولة رئيس، يمكن تخيل عالم فيه أشخاص من دون قلب. مع الكثير من الخيال يمكن تخيل عالم فيه لكلّ شخص ثلاثة أولاد، على الرغم من أن هذا يجبرنا على أن يكون في هذا العالم عدد لا نهائي من الاشخاص، حيث يوجد لكلّ شخص 3 أولاد، 9 أحفاد، 27 ابن حفيد وهكذا دواليك. هذه الإجابة المتزاكية ستؤدي إلى أن تكون الاجابة للبند (5) هي أيضا "أحيانا صدق وأحيانا كذب".

28 لنتمخّن في القضيّة: "يوجد دولة عاصمتها لندن".

اكتبوا مجال تعريف المتغيّر  $x$  والمعنى الكلامي للقضيّة  $B(x)$  التي تمثّل القضيّة  $\exists x(B(x))$  "يوجد دولة عاصمتها لندن".  
مجال تعريف المتغيّر  $x$ : كل دول العالم.  
 $B(x)$  = "عاصمة الدولة  $x$  هي لندن".

29 بمساعدة  $A(x)$  و  $B(x,y)$  المسجّلة أعلاه، اكتبوا بلغة حساب القضايا الجملة الآتية: "يوجد في الصف ثلاثة طلاب، على الأقل، اسمهم عمرو". انتبهوا إلى أنّ عليكم الاستعانة بثلاثة متغيرات  $x, y, z$  – لوصف الطلاب الثلاثة.  
$$\exists x \exists y \exists z (A(x) \wedge A(y) \wedge A(z) \wedge (\neg B(x,y)) \wedge (\neg B(x,z)) \wedge (\neg B(y,z)))$$

30

سنرى في هذا التمرين أنّ في الإمكان كتابة القضيّة "يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد" على النحو الآتي:  
$$\forall x \forall y (B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))))$$

أ. اكتبوا بالكلمات معنى التعبير  $B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y)))$ :

" $x$  و  $y$  هم الطالب نفسه، أو إذا كان الطالب  $x$  أشقرًا فإن الطالب  $y$  ليس أشقرًا".

ب. فسّروا لماذا القضية  $\forall x \forall y (B(x,y) \vee (A(x) \rightarrow (\neg A(y))))$  تعني أنّه يوجد في الصف على الأكثر طالب أشقر واحد. المعنى الكلامي للقضية هو:

"لكلّ طالبين في الصف أو أنّهما الطالب نفسه، أو إذا كان أحدهما أشقرًا فالآخر ليس أشقرًا".

طريقة أخرى لنصّ المعنى الكلامي هي:

"لكلّ طالبين مختلفين في الصف، إن كان أحدهما أشقرًا فإن الآخر غير أشقر".

نلاحظ، من هنا، أنه لا يمكن أن يكون في الصف أكثر من طالب أشقر واحد، فإن كان

في الصف طالبان أشقران، كنا سنجد طالبين مختلفين أحدهما أشقر والآخر ليس أشقرًا،

وعندها لن يتحقّق المعنى الثاني الذي اقترحناه.

31 سنكتب في هذا التمرين بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن". نلاحظ أنّ القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن" مكافئة للقضية "يوجد دولة واحدة، على الأقل، عاصمتها لندن؛ وأيضا دولة واحدة، على الأكثر، عاصمتها لندن".

$D(x)$  = "عاصمة الدولة  $x$  هي لندن".

أ. مجال تعريف  $x$  هو: كل دول العالم.

ب. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، على الأقل، عاصمتها لندن":  $\exists x(D(x))$

ت. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، على الأكثر، عاصمتها لندن"، استعملوا القضية  $B(x,y) = "x=y"$ .

$\forall x \forall y ( (D(x) \wedge D(y)) \rightarrow B(x,y) )$

ث. اكتبوا بلغة حساب القضايا القضية "يوجد دولة واحدة، بالضبط، عاصمتها لندن":

$(\exists x(D(x))) \wedge (\forall x \forall y ( (D(x) \wedge D(y)) \rightarrow B(x,y) ) )$

32 لنتمنّ في القضية "يوجد لكلّ طالب أب وأم". فلنفترض أنّ:

$A(x,y)$  = "y هو أب x"

$B(x,z)$  = "z هي أم x"

أ. اكتبوا مجال التعريف للمتغيرات  $x, y, z$ :

مجال تعريف  $x$ : كلّ الطلاب في العالم.

مجال تعريف  $y$ : كلّ الآباء في العالم.

مجال تعريف  $z$ : كلّ الأمهات في العالم.

ب. اكتبوا القضية "يوجد لكل طالب أب" بواسطة  $A(x,y)$  و  $\exists, \forall$ .

$\forall x \exists y A(x,y)$

ت. اكتبوا القضية "يوجد لكل ولد أم" بواسطة  $B(x,z)$  و  $\exists, \forall$ .

$\forall x \exists z B(x,z)$

ث. اكتبوا القضية "يوجد لكل ولد أب وأم" بواسطة  $A(x,y), B(x,z)$  و  $\exists, \forall$ . انتبهوا إلى أنّ عليكم استعمال  $\exists$  مرتين.

إحدى الطرق لكتابة القضية هي:

$\forall x \exists y \exists z (A(x,y) \wedge B(x,z))$

طريقة أخرى لكتابة القضية هي:

$(\forall x \exists y A(x,y)) \wedge (\forall x \exists z B(x,z))$

33 لنتمن في القضية:  $D = \text{"لكل طالب يوجد صديق اسمه يوسف"}$ .

فلنفترض أن:

$A(x) = \text{"اسم } x \text{ هو يوسف"}$ ،

$B(x,y) = \text{"الطالب } x \text{ هو صديق الطالب } y"$ .

أ. مجال تعريف  $x$ : كل أولاد العالم.

ب. مجال تعريف  $y$ : كل أولاد العالم.

ت. اكتبوا القضية  $D$  بواسطة  $A(x)$ ,  $B(x,y)$  والتعبير الكمية  $\forall, \exists$ :

$$\forall x \exists y (A(y) \wedge B(x,y))$$

المعنى الكلامي للقضية هو: لكل طالب  $x$  يوجد طالب  $y$  حيث أن  $y$  هو يوسف والطالب  $x$  صديق للطالب  $y$ .

34 لنتمن في القضية:  $D = \text{"لكل طالب اسمه ليس سيف يوجد صديق اسمه سيف"}$ .

فلنفترض أن:

$A(x) = \text{"اسم } x \text{ هو سيف"}$ .

$C(x,y) = \text{"الطالب } y \text{ هو صديق الولد } x"$ .

اكتبوا القضية  $D$  بواسطة  $A(x)$ ,  $B(y)$ ,  $\forall$  و  $\exists$  ورموز منطق إضافية. يمكن الاستعانة بمتغيرات إضافية. انتبهوا إلى أنه يجب استعمال  $A(x)$  مرتين!

الإجابة:  $\forall x ((\neg A(x)) \rightarrow (\exists y (A(y) \wedge C(x,y))))$

35 مجال تعريف المتغير  $x$  هو "كل البنين في الصف"، ومجال تعريف المتغير  $y$  هو "كل البنات في الصف". مجال تعريف المتغير

$z$  هو "طلاب الصف (بنين وبنات)".

فلنفترض أن:

$D(z) = \text{"للطالب } z \text{ يوجد بلوزة حمراء"}$ ،

$C(z) = \text{"الطالب } z \text{ يحب لعب كرة القدم"}$ .

اكتبوا القضايا الآتية بواسطة  $C(y)$ ,  $C(x)$ ,  $D(y)$ ,  $D(x)$  وروابط منطق أخرى. قد تحتاجون إلى استعمال متغيرات أخرى.

أ. "كل البنين في الصف يحبون لعب كرة القدم، ويوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall x (C(x))) \wedge (\exists y (D(y)))$$

ب. "كل البنات في الصف تحب لعب كرة القدم، ولا يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall y (C(y))) \wedge (\neg (\exists y (D(y))))$$

حل آخر:

$$(\forall y (C(y))) \wedge (\forall y (\neg D(y)))$$

ت. "إذا كان كل البنين في الصف يحبون لعب كرة القدم، فإنه يوجد بنت في الصف ترتدي بلوزة حمراء":

$$(\forall x (C(x))) \rightarrow (\exists y (D(y)))$$

ث. "إذا كان في الصف بنتان تحبان لعب كرة القدم، فإنه يوجد في الصف اثنتان من البنين يرتديان بلوزة حمراء": استعملوا في القضية  $x=y = B(x,y)$ . علينا في هذا التمرين استعمال متغيرين مختلفين يمثلان بنات، ومتغيرين مختلفين يمثلان بنين.

المتغيران اللذان يمثلان البنات هما  $y_1$  و  $y_2$  والمتغيران اللذان يمثلان البنين هما  $x_1$  و  $x_2$ .

$$(\exists y_1 \exists y_2 (C(y_1) \wedge C(y_2) \wedge (\neg B(y_1, y_2)))) \rightarrow (\exists x_1 \exists x_2 (D(x_1) \wedge D(x_2) \wedge (\neg B(x_1, x_2))))$$

36 فلنفترض أن  $B(x)$  = "يوجد للطالب  $x$  أخت اسمها حلا"؛ مجال تعريف  $x$  هو "طلاب الصف".

أ. اكتبوا المعنى الكلامي للقضية  $(\exists x(B(x)))$ : ليس صحيحاً وجود طالب في الصف اسم أخته حلا.

ب. اكتبوا المعنى الكلامي للقضية  $(\forall x(\neg B(x)))$ :

لكل الطلاب في الصف لا يوجد اخت اسمها حلا.

ت. فسروا لماذا القضية  $(\exists x(B(x)))$  مكافئة للقضية  $(\forall x(\neg B(x)))$ .

القضيتان متكافئتان لأنّ لهما دائماً نفس قيمة الصدق: قيمة الصدق لكلا القضيتين هي صدق،

إن لم يكن هناك أي طالب في الصف اسم أخته حلا، وقيمة الصدق لكلا القضيتين هو "كذب" إن كان هناك على الأقل طالب واحد في الصف اسم أخته حلا.

تعرض كَرَاسات "يستحقّ المعرفة" توليفةً من المواضيع الأكاديميّة  
والمسائل المتقدّمة بلغة تناسب الجميع. تهدف هذه الكَرَاسات إلى كشف  
القراء على مجالات جديدة وإلى تحدّي تفكيرهم.  
تعرض هذه الكَرَاسة لغة حساب القضايا وأُسُس المنطق الرياضي: ما  
معنى قضيّة، قيمة صدق القضية، قواعد الاستنتاج والتعبيرات الكميّة.



برنامج بينو أربيل للطلاب المتفوّقين في الرياضيّات  
مدرسة علوم الرياضيّات  
كلية العلوم الدقيقة على اسم ريموند وبفرلي ساكسر  
جامعة تل أبيب

[goodtoknow.tau.ac.il](http://goodtoknow.tau.ac.il)