



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (27.01.2023)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר

יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות התחילו כל שאלה בעמוד חדש וציינו בהבלטה את מספרה. מחקו טיטוט.

1. א. הוכיחו שלכל n טבעי קיים $m = m_n$ שעבורו $10^n = 3m + 1$, זאת אומרת שכשמחלקים חזקה טבעית של 10 ב-3 מתקבלת שארית 1 (6 נקודות)
 ב. הוכיחו שמספר טבעי (בהצגה עשרונית) מתחלק ב-3 (ללא שארית) אם-ורק-אם סכום ספרותיו העשרוניות מתחלק ב-3 (11 נקודות)

2. מצאו את כל זוגות המספרים הממשיים (x, y) המקיימים את שתי המשוואות

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 7 + xy \\ x^4 + y^4 &= 133 - x^2 \cdot y^2\end{aligned}$$

3. בשלב הבתים (השלב הראשון) של מונדיאל הכדורגל משתתפות 32 נבחרות לאומיות (להלן-קבוצות) המחולקות ל-8 בתים בני 4 קבוצות כל אחד. בכל בית, כל קבוצה משחקת (משחק אחד) נגד כל קבוצה אחרת מאותו בית (אין בשלב זה משחקים בין קבוצות השייכות לבתים שונים). פי כמה היה משתנה (גדל או קטן) מספר המשחקים הכולל (בכל הבתים) בשלב הבתים של המונדיאל, אילו היו מחלקים את 32 הקבוצות המשתתפות ל-4 בתים של 8 קבוצות כל אחד ובכל בית כל קבוצה נדרשה לשחק נגד כל אחת מ-7 חברותיה לבית?

4. מצאו את כל אברי הקבוצה $A = \{0 \leq x \leq \pi : \sin(x) + \cos(x) > 0\}$ וכתבו את הקבוצה במפורש.

5. א. כתבו בהצגה פולארית את המספרים המרוכבים $1 + \sqrt{3}i, 5 + 5i$ (5 נקודות)
 ב. כתבו בהצגה קרטזית את המספר המרוכב $(1 + \sqrt{3}i)^5 (5 + 5i)^4$ (12 נקודות)

6. מצאו את כל המספרים הממשיים x המקיימים את אי-השוויון $\log_x |x^2 - 1| < 0$.

ב ה צ ל ח ה