School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (27.01.2023)

1. א. הוכיחו שלכל n טבעי קיים $m = m_n$ שעבורו $10^n = 3m+1$, זאת אומרת שכשמחלקים חזקה טבעית של 10 ב-3 מתקבלת שארית 1 (6 נקודות)

ב. הוכיחו שמספר טבעי (בהצגה עשרונית) מתחלק ב-3 (ללא שארית) אם-ורק-אם סכום ספרותיו העשרוניות מתחלק ב-3 (11 נקודות)

פתרון: א. $10^1 = 10 = 3\times 3+1$ כך ש- $m_1 = 3$. נניח (באינדוקציה) קיומו של m_n ונוכיח קיומו של m_{n+1}:

$$10^{n+1} = 10\times 10^n = 10(3m_n + 1) = 30m_n + 9+1 = 3(10m_n + 3)+1$$

ומכאן $m_{n+1} = 10m_n + 3$.

ב. יהי $N = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ מספר טבעי בעל $n+1$ ספרות עשרוניות $a_n,\ldots,a_0$, $0 \le a_k \le 9$ שלמים, $a_n \ne 0$ (כדי שיהיו אכן $n+1$ ספרות).

לפי התוצאה בחלק א' של השאלה,

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k(3m_k + 1) = 3\sum a_k m_k + \sum a_k$$

פיצלנו את המספר לסכום של שני מספרים שאחד מהם הוא כפולה של 3 והשני הוא סכום הספרות. מובן מאליו שסכום כזה מתחלק ב-3 אם-ורק-אם המחובר השני, כאמור – סכום הספרות, מתחלק ב-3.

אגב, הוא הדין לגבי התחלקות ב-9.

2. מצאו את כל זוגות המספרים הממשיים (x,y) המקיימים את שתי המשוואות

$$x^2 + y^2 = 7 + xy$$
$$x^4 + y^4 = 133 - x^2\cdot y^2$$

פתרון: נסמן $x^2 = a$, $y^2 = b$ ונקבל: $a+b = 7+\sqrt{ab}$, $a^2+b^2 = 133-ab$

נעלה את המשוואה הראשונה בריבוע ונחסיר אות מהשנייה, נקבל:

$$2ab = 2ab - 84 + 14\sqrt{ab}$$

ומכאן $6=\frac{84}{14}=xy=\sqrt{ab}$. נציב במשוואה המקורית הראשונה $\frac{6}{x}$ במקום y ונקבל
$x^2+(\frac{6}{x})^2=7+6=13$ השקול ל- $x^4-13x^2+36=0$ וזו משוואה ריבועית עבור x^2
שפתרונה $x^2=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{1}{2}(13\pm5)=9\,or\,4$ ולכן $x=\pm3\,or\,x=\pm2$ ואידך זיל
גמור... לבסוף כדאי לשים לב לכך שכשמחליפים בין x ל- y המשוואות אינן משתנות,
כך שאם הזוג (x,y) מקיים אותן, אז כך גם הזוג (y,x).

3. בשלב הבתים (השלב הראשון) של מונדיאל הכדורגל משתתפות 32 נבחרות לאומיות (להלן-קבוצות) המחולקות לשמונה בתים בני 4 קבוצות כל אחד. בכל בית, כל קבוצה משחקת (משחק אחד) נגד כל קבוצה אחרת מאותו בית (אין בשלב זה משחקים בין קבוצות השייכות לבתים שונים). פי כמה היה משתנה (גדל או קטן) מספר המשחקים הכולל (בכל הבתים) בשלב הבתים של המונדיאל, אילו היו מחלקים את 32 הקבוצות המשתתפות ל-4 בתים של 8 קבוצות כל אחד ובכל בית כל קבוצה נדרשה לשחק נגד כל אחת מ-7 חברותיה לבית?

פתרון: מספר המשחקים בבית בן 4 קבוצות הוא 6 ולכן יש בסך הכל $8\times6=48$ משחקים בשלב הבתים. אילו שיחקו עם 4 בתים בני 8 קבוצות היו בכל בית $\binom{8}{2}=28$ משחקים ומספר המשחקים הכולל היה גדל ל- $4\times28=112$ כך שמספר המשחקים היה גדל פי $\frac{128}{48}=2\frac{2}{3}$.

4. מצאו את כל אברי הקבוצה $A=\{0\le x\le\pi:\sin(x)+\cos(x)>0\}$ וכתבו את הקבוצה במפורש.

פתרון: הסינוס והקוסינוס חיוביים בקטע $[0,\frac{\pi}{2}]$ ולכן גם סכומן חיובי בקטע זה.
לעומת זאת, בקטע $(\frac{\pi}{2},\pi]$ הסינוס ממשיך להיות חיובי ואילו הסימן של הקוסינוס מתהפך והקוסינוס שלילי, לכן בקטע זה הסכום יהיה חיובי אם-ורק-אם $\sin x\ge|\cos x|$. כידוע שוויון מתקיים כאשר $x=\frac{3}{4}\pi\,radians=135^\circ=90^\circ+45^\circ$.

הסינוס יורד ברציפות מ-1 ל-0 בקטע הנדון ואילו הקוסינוס יורד מ-0 ל-(1-) באותו קטע ולכן סכומם חיובי בתת הקטע $[\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi)$ ושלילי בחלקו השני של הקטע.

לסיכום: הקבוצה המבוקשת היא הקטע $[0,\frac{3}{4}\pi)$.

5. א. כתבו בהצגה פולארית את המספרים המרוכבים $1+\sqrt{3}i, 5+5i$ (5 נקודות)

ב. כתבו בהצגה קרטזית את המספר המרוכב $(1+\sqrt{3}\,i)^5(5+5i)^4$ (12 נקודות)

פתרון: א. $1+\sqrt{3}\,i = 2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$$5+5i = \sqrt{50}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i) = \sqrt{50}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

ב.

$$[2cis\frac{\pi}{3}]^5[\sqrt{50}cis\frac{\pi}{4}]^4 = 32cis\frac{5\pi}{3}\cdot 2500cis\pi = 80,000cis(\frac{5\pi}{3}+\pi) = 80,000(\cos\frac{8\pi}{3}+i\sin\frac{8\pi}{3}) =$$

$$= 80,000(\cos 480^\circ + i\sin 480^\circ) = 80,000(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = 80,000(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i) =$$

$$= -40,000+40,000\sqrt{3}\,i$$

6. מצאו את כל המספרים הממשיים x המקיימים את אי-השוויון $\log_x|x^2-1|<0$.

פתרון: הביטוי מוגדר רק כאשר x חיובי ואז אי השוויון שקול ל-
ו-$|x^2-1|>1$ עבור $0<x<1$ אבל זו קבוצה $\log_x|x^2-|<\log_x 1 \Leftrightarrow |x^2-1|<1,\ x>1$
ריקה כך שנניח מעתה ש- $1<x$. $0<x<\sqrt{2} \Leftrightarrow 0<x^2<2 \Leftrightarrow |x^2-1|<1$ כך
שקבוצת המספרים המבוקשת היא הקטע הפתוח $(1,\sqrt{2})$.