

חלק א' – מבוא

במסמך זה נכיר כלים סטטיסטיים שמלמדים על אופייה של קרינה רדיואקטיבית. נתחיל בהרחבת הידע הקיים בסטטיסטיקה לטיפול בתהליכים פואסוניים (מהנפוצים בטבע) וריענון בנושא ההתפלגות הנורמלית. נמשיך בתיאור סוגי הקרינה השונים ודעיכתם ונסיים במידע שימושי על שפופרת גייגר-מילר.

טיפ למתכוננים לבוחן: עיברו גם על "שאלות הכנה" המופיעות בתדריך.

חלק ב' – סטטיסטיקה

ב.1 התפלגות פואסון

תהליך פואסוני – תהליך המתרחש במערכת המורכבת מאוסף של חלקיקים שניתן להתייחס אליה כאוסף של מערכות חד-חלקיקיות **בלתי תלויות**.

בנספח 1 אנו מוכיחים כי בהנחת תהליך פואסוני, ההסתברות $P(K)$ שמקור רדיואקטיבי יפלוט K חלקיקי β בשניה (זו המדידה שתבצעו בניסוי) הינו

$$P(K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad (1)$$

כאשר התוחלת של ההתפלגות הינה λ והשונות גם היא (ללא הוכחה) λ (סטיית התקן $\sqrt{\lambda}$). בהקשר של רדיואקטיביות, λ הוא קצב ההתפרקות הטבעי של המקור. כאשר נמדוד משתנה y שאנו מאמינים שמתפלג פואסוני, שגיאתו תהיה שורש התוחלת:

$$\Delta y = \sqrt{y} \quad (2)$$

בניסוי נמדוד את ההסתברות שמקור צסיום (מקור β) יפלוט K חלקיקים בשניה עבור הרבה ערכים של K ונקבל את הגרף השמאלי באיור 1.

ב.2 השגיאה של השונות

בחלק ב' בניסוי (ראו תדריך) אנו נדרשים לחשב את השגיאה של השונות של אוסף מדידות. עבור סט של N מדידות $\{x_1..x_N\}$ נזכר בהגדרת האומד של סטיית התקן (משוואה 3.9 בעמ' 17 בחוברת סטטיסטיקה של המעבדה):

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}} \quad (3)$$

עמוד 1 מתוך 8

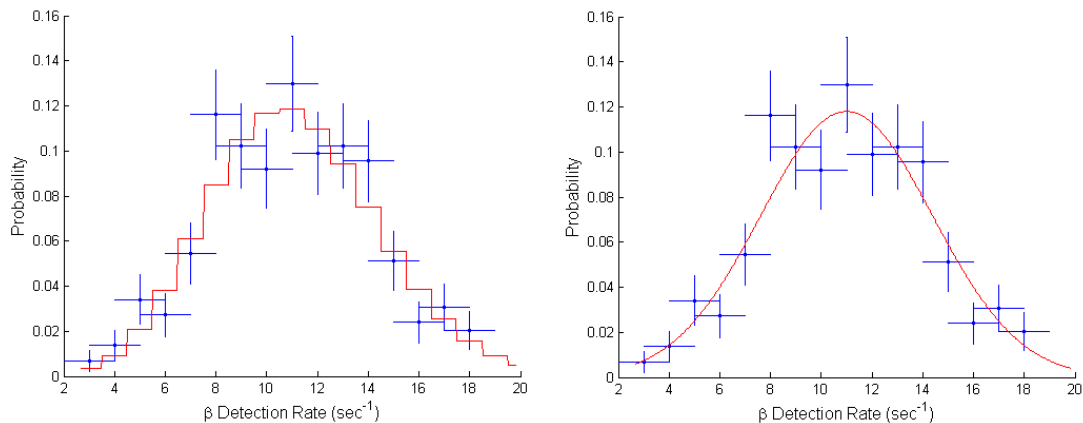
השגיאה שלו לפי משוואה 3.13 בחוברת סטטיסטיקה

$$\Delta\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-1)}} \quad (4)$$

כאמור, אנחנו צריכים את השגיאה של השונות $V = \sigma^2$. נעזר בנגזרות חלקיות כדי לקבל

$$\Delta V = 2\sigma\Delta\sigma = 2\sigma \frac{\sigma}{\sqrt{2(N-1)}} = V \sqrt{\frac{2}{N-1}} \quad (5)$$

זכרו את התוצאה החשובה הזו לניסוי.



איור 1 התאמה של התפלגות פואסון (שמאל) והתפלגות הנורמלית (ימין) להתפלגות הקרינה של מקור ביתא

ב.3 התפלגות נורמלית (יתכן ולא תשתמשו בניסוי)

נאמר כי x מתפלג נורמלית עם תוחלת μ ושונות σ^2 ויסומן $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ אם מתקיים כי

$$P(a < x < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (6)$$

מקרה פרטי: אם $\mu = 0, \sigma = 1$, נקרא להתפלגות נורמלית סטנדרטית. שימו לב שקיימת הסתברות סופית לכל ערך של x , בשונה מהתפלגות האחידה, בה סיכוי אפס למדוד משתנה מחוץ לקטע עליו היא מוגדרת.

ב.4 משפט הגבול המרכזי (יתכן ולא תשתמשו בניסוי)

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ סדרה של אינסוף משתנים שווי התפלגות מהתפלגות לא ידועה עם תוחלת μ סופית ושונות σ^2 . נגדיר $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, אזי מתקיים כי המשתנה $Y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ משתייך להתפלגות הנורמלית סטנדרטית. $Y \sim N(0,1)$. במילים אחרות, כאשר מספר המדידות שואף לאינסוף הממוצע של המדידות מתפלג נורמלית. עמוד 2 מתוך 8

חשוב לציין כי למרות העובדה שהתאמה מלאה בין ההתפלגות הלא ידועה וההתפלגות הנורמאלית תתקבל רק בגבול $N \rightarrow \infty$, ניתן לקבל קירוב גאוסי סביר בהחלט אפילו עבור מספר מועט של התפלגויות. משפט זה נכון לכל התפלגות, גם אם היא לא ידועה.

חלק ג' – רדיואקטיביות

ג.1 תהליכים גרעיניים ופליטה של קרני α, β, γ

איזוטופים גרעיניים עוברים תהליכים ההופכים אותם לאיזוטופים יציבים יותר. התהליך הגרעיני מלווה בפליטה של קרינה רדיואקטיבית. בדרך כלל התפרקות רדיואקטיבית אחת לא תספיק כדי להביא את הגרעין למצב יציב והוא יעבור שורה של התפרקויות כאלו. ישנם שלושה סוגי קרינה רדיואקטיבית המלווים בשלושה תהליכים גרעיניים בהתאמה.

קרינת α

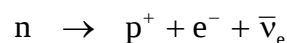
הכוחות החזקים הפועלים בין הנוקליאונים אינם מאפשרים לנוקליאון בודד לצאת מהגרעין. נוקליאונים יכולים להיפלט מהגרעין רק בקבוצות של ארבעה: שני פרוטונים ושני נייטרונים ביחד, צירוף כזה, שהוא למעשה גרעין של אטום הליום (${}^4_2\text{He}$), נקרא חלקיק אלפא (מסומן באות היוונית α) וממנו מורכבות קרני α . דוגמא לתהליך זה:



אפשר להטות את קרינת ה- α בעזרת שדה מגנטי או חשמלי והיא נבלעת במספר מיקרונים של חומר מוצק.

קרינת β

האינטראקציה האחראית לתהליך הגרעיני של קרינת β מכונה האינטראקציה החלשה. בתהליך זה אחד הנייטרונים של הגרעין הופך לפרוטון, אלקטרון וחלקיק נייטרלי הנקרא אנטי-ניוטרינו שמסומן $\bar{\nu}_e$.



קשה ביותר לגלות את האנטי-ניוטרינו ולכן לא נחפש אותו בניסוי זה. קרינת האלקטרונים הנפלטת מן הגרעין מסומנת באות היוונית β (ביתא). התהליך אותו נאפיין בניסוי:



Cs – צסיום, Ba – בריום, $\bar{\nu}_e$ – אנטי נייטרינו, γ – פוטון.

עמוד 3 מתוך 8

את קרינת ה- β אפשר להטות כמו את קרינת ה- α בעזרת שדה מגנטי או חשמלי. מאחר והאלקטרונים קלים בהרבה מחלקיקי ה- α , הטית קרינת β דורשת שדות חלשים יותר. למעלה מ-99.9% מחלקיקי β (שם אחר לאלקטרונים) נבלעים בלוח אלומיניום בעובי 1 מ"מ.

קרינת γ

בפליטת קרינת α, β משתנים מספר הפרוטונים והנויטרונים בגרעין. ישנו תהליך נוסף הגורם לשינויים במצב האנרגטי של הגרעין מבלי שחל שינוי במספר הפרוטונים והנויטרונים שבו. בתהליך זה גרעין מעורר עובר למצב של גרעין לא מעורר, על ידי כך שנוקליאון במצב אנרגטי גבוה כלשהו עובר למצב אנרגטי נמוך יותר לא מאוכלס. הנוקליאון מאבד אנרגיה בתהליך שכזה והאנרגיה נפלטת בצורה של קרינה אלקטרומגנטית.

חלקיקי הקרינה האלקטרומגנטית, הפוטונים, הנפלטים מהגרעין הם בעלי אנרגיות גבוהות בהרבה מאלו של האור הנראה, והם נקראים חלקיקי גאמה ומסומנים באות היוונית γ . קרינת הגאמה מורכבת אם כן מחלקיקים ניטרליים מבחינה חשמלית ולכן, בניגוד לקרינת האלפא והביטא, לא תוסט על ידי שדה מגנטי. יש לציין שקרינת ה- γ בדרך כלל מופיעה כמעין תוצר לוואי של קרינת α או קרינת β .

מקורות הקרינה שלנו

בניסוי נשתמש במקור תליום וצסיום (Cs, Tl). למקורות זמן מחצית חיים¹ של כמה שנים. קרינת ה- γ הנפלטת ממקור הצסיום היא באנרגיה של 0.6617 MeV.

2.ג דעיכה בזמן של קרינה רדיואקטיבית

גוש של חומר רדיואקטיבי הוא אוסף של אטומים רבים (כ- 10^{24}) אשר חלקם איזוטופים וחלקם כבר אטומים יציבים. אמפירית, התפרקות רדיואקטיבית היא תהליך פואסוני מעולה, קרי גרעין מתפרק ללא כל תלות בסביבתו. ההסתברות של גרעין להתפרק ביחידת זמן מסומנת בד"כ ב- λ . מספר ההתפרקויות של N איזוטופים ביח' זמן יהיה

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N(t) \quad (7)$$

כך שלאחר אינטגרציה

$$N(t) = N_{(t=0)} e^{-\lambda t} \quad (8)$$

¹ המושג "זמן מחצית חיים" יוגדר בסעיף 2.ג.

זמן הדעיכה האופייני $\tau \stackrel{\text{def}}{=} 1/\lambda$ הוא הזמן בו דועכת כמות האיזוטופים לכדי $\frac{1}{e}$ מהערך

ההתחלתי $N(t=0)$. לפעמים נוח לעבוד עם **זמן מחצית החיים** τ , זהו פרק הזמן בו חצי מהאיזוטופים יתפרקו. הקשר בין השניים:

$$e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}, e^{-\lambda \tau} = \frac{1}{e} \Rightarrow \ln(e^{-\lambda t_{1/2}}) = \ln(1/2) \Rightarrow -\lambda t_{1/2} = -\ln(2) \quad (9)$$

$$t_{1/2} = \tau \ln(2)$$

אקטיביות: מספר הגרעינים המתפרקים ביחידת זמן: $|dN/dt|$. האקטיביות דועכת גם היא בצורה אקספוננציאלית כפי שאפשר לראות ממשוואה (4).

ג. דעיכה מרחבית של קרינת γ

אמפירית, עצמתה של קרינת γ העוברת דרך חומר דועכת גם היא אקספוננציאלית, עם הסתברות קבועה μ להבלע ביח' אורך של החומר. כמובן שאותן המשוואות מתקיימות:

$$N(x) = N_{(t=0)} e^{-\mu x} \quad (10)$$

וקיים אורך מחצית בליעה, באנלוגיה לזמן מחצית החיים.

$$x_{1/2} = \ln(2) / \mu \quad (11)$$

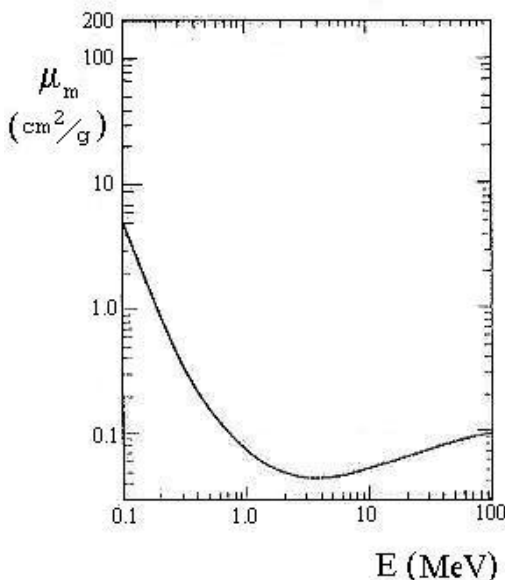
מקדם הבליעה μ תלוי באנרגיה של הקרינה ובחומר הבולע את הקרינה, ולכן הוא משתנה מאוד מחומר לחומר. μ תלוי גם בצפיפות החומר- ρ : ככל שהחומר יותר צפוף, כך הבליעה תהיה יותר חזקה (ולכן μ גדול יותר). מסיבה זו אותו חומר במצבי צבירה שונים יהיה בעל μ אחר. אנו נרצה למצוא מאפיין בליעה של החומר עצמו, שאינו תלוי בצפיפות החומר. לשם כך נחליף משתנים כדי לקבל מקדם בליעה שלא תלוי בצפיפות:

$$\mu x = x' \mu_m \quad (12)$$

$$\text{כאשר } x' = \rho x \text{ ו- } \mu_m = \frac{\mu}{\rho}$$

ל- x' אין כינוי אך מקובל לבטא את עובי החומר הבולע ע"י x' . היחידות של x' הן g/cm^2 . μ_m נקרא **מקדם הבליעה של המסה**. הוא תלוי בעיקר באנרגיה של קרני הגאמה. בתחום האנרגיות שבו נתקל בניסוי שלנו הוא משתנה מעט מאוד עם סוג החומר הבולע.

עמוד 5 מתוך 8

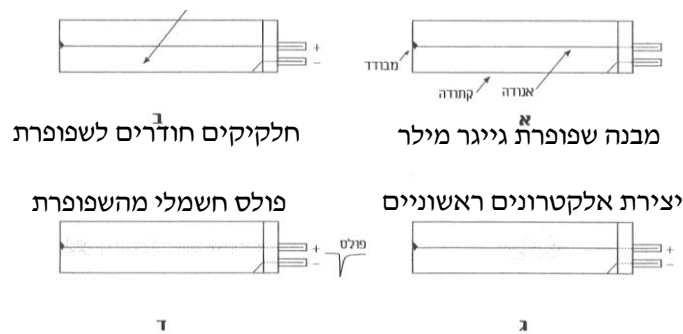


איור 2 מקדם הבליעה של המסה של עופרת כתלות באנרגיה

היחידות של μ_m הן כמובן ההפכי של יחידות x' : $[\mu_m] = \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}\right]$. איור 2 מתאר את התלות של μ_m באנרגיה עבור עופרת.

ג.4 שפופרת גייגר-מילר

שפופרת גייגר-מילר היא התקן המאפשר לספור חלקיקים של קרינה רדיואקטיבית. השפופרת מורכבת מחוט טונגסטן דק (אנודה) העובר לאורך ציר של גליל הממולא בגז אציל בלחץ נמוך. פני הגליל מצופים בחומר מוליך (קתודה). האנודה מבודדת מהקתודה.



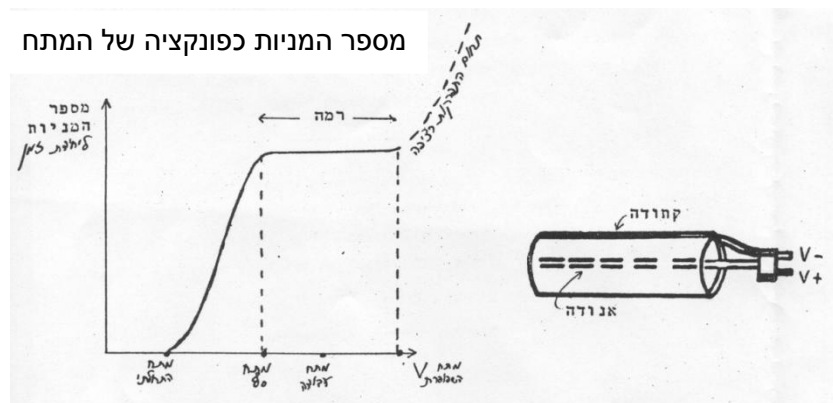
איור 3 יצירת פולס חשמלי בשפופרת גייגר

כאשר חלקיק בעל מטען חשמלי (α או β) עובר בתוך השפופרת הוא מתנגש באטומי הגז האציל. בכל התנגשות שכזו הוא "קורע" אלקטרונים מאטומי הגז בכך הוא יוצר יונים חיוביים (אטומי הגז המיוננים) ואלקטרונים. האלקטרונים הנוצרים כתוצאה מינון הגז על ידי הקרינה נקראים אלקטרונים ראשוניים. באופן טבעי האטומים המיוננים נוטים להתחבר בחזרה לאלקטרונים שנקרעו מהם. אולם אם האנודה תמצא במתח חיובי והקתודה במתח שלילי, האלקטרונים יאיצו לכיוון האנודה והיונים לכיוון הקתודה. כאשר האלקטרונים המואצים יצברו מספיק אנרגיה קינטית הם יתנגשו באטומים נוספים וישחררו אלקטרונים נוספים הנקראים אלקטרונים שניוניים. גם האלקטרונים השניוניים יאיצו לכיוון האנודה והתהליך יחזור על עצמו עד אשר האלקטרונים יגיעו לאנודה, תהליך זה נקרא מפולת. מספר האלקטרונים בכל מפולת תלוי במתח בין האנודה לקתודה ובמרחק האלקטרון הראשוני מהאנודה, ככל שנעלה את המתח יותר אלקטרונים יגיעו לאנודה. כתוצאה מהצטברות המטען על האנודה נקבל פולס חשמלי. ככל שיגיעו יותר אלקטרונים אל השפופרת הפולס החשמלי יהיה חזק יותר.

חשוב לזכור שמונה הגייגר מודד פולסים. הוא אינו רושם את עוצמת הפולס. כאשר מגיעים אלקטרונים אל האנודה הם יוצרים זרם, אם הזרם עובר את סף המכשיר תרשם קריאה, במידה והזרם היה חלש מידי, לא ירשם דבר.

בניסוי יש לנו שליטה על המתח בין האנודה לקתודה. אם המתח קטן מידי לא יוצרו כלל

פולסים. מעל מתח מסויים, הנקרא המתח ההתחלתי, יתחילו להוצר פולסים בעוצמה מתכונתית למספר המפולות (שווה למספר האלקטרונים הראשוניים שנפלטו) כתוצאה ממעבר החלקיק בגז, באופן אינטואיטיבי, מספר הפולסים יעלה עם העלאת המתח. במתח זה יהיה צורך במספר אלקטרונים ראשוניים על מנת שתרשם מדידה. במתח מסויים, הנקרא מתח הסף, מספר האלקטרונים השניונים יהיה גדול מספיק בכדי שעוצמת הפולס לא תהיה תלויה במספר האלקטרונים הראשוניים. החל ממתח זה נקבל רמה שטוחה, כלומר מספר המניות לא יעלה עוד וישאר קבוע גם כאשר נעלה את המתח. אם נעלה את המתח מעבר לתחום הזה, נקבל התפרקות רצופה בין הקטודה לאנודה והשפופרת תתקלקל.



איור 4 מונה גייגר מילר וגרף האופייני שלו

הרמה איננה שטוחה לחלוטין אלא קיימת עליה קטנה במספר המדידות עם עליית המתח, לכן במהלך הניסויים חשוב לשמור על מתח עבודה קבוע.

קרני גאמה שאין להן מטען חשמלי, אינן מוציאות אלקטרונים מאטומי הגז. אולם כאשר חלקיק גאמה נבלע או מתפזר מדפנות השפופרת, נפלט מהדפנות אלקטרון שאותו אפשר לגלות בדרך שתוארה לעיל. מכיוון שדפנות השפופרת דקים, מספר הפולסים שיתקבלו בשפופרת הוא בסדר גודל של אלפית ממספר חלקיקי ה- γ שעברו בשפופרת, אך עדיין מתכונתי להם.

חלק ד' – סיכום

אם כן, נוכחנו כי פליטת קרינה רדיואקטיבית הינה תהליך פואסוני, לכן אם נמדוד את כמות ההתפרקויות הגרעיניות בהרבה חלונות שווי-זמן, ללא שינוי תנאי המדידה, נצפה כי השונות והתוחלת ישתוו, בהתאם להתפלגות פואסון (משוואה 1).

בנוסף, למדנו כי קרינת γ נבלעת בחומר באופן מעריכי, כאשר מקדם הבליעה מתכונתי לצפיפות החומר ומשתנה מחומר לחומר $\mu = \mu_m \rho$.

נספח 1 – התפלגות פואסון

הפיתוח לנוסחה (1) מובא להלן. מומלץ לקרוא על התפלגות בינומית בסעיף 3.3 – "התפלגות פואסון" בחוברת סטטיסטיקה (עמ' 19). כפי שנאמר שם, התפלגות פואסון היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית. אם משתנה בדיד כלשהו מתפלג בינומית עם הסתברות p להצלחה, אז ההסתברות שמתוך N מדידות, K מהן יהיו הצלחה הוא

$$P(K) = \binom{N}{K} (p)^K (1-p)^{N-K} \quad (13)$$

כאשר

$$\binom{N}{K} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{N!}{K!(N-K)!} \quad (14)$$

נניח ומבצעים מספר גדול מאד ($N \gg 1$) של מדידות כאשר ההסתברות להצלחה בכל מדידה הינו $p = \frac{\lambda}{N}$ (זה המקרה הפרטי בו מכריחים את התוחלת $N \times p$ להיות λ). אם נציב את ההסתברות הנתונה ונקח את הגבול $N \rightarrow \infty$ נקבל

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(K) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{K!(N-K)!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^K \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-K} \quad (15)$$

כאשר בשורה השניה הצבנו את (14). כדי לקחת בזהירות את הגבול, נשתמש בנוסחת סטירלינג ל N גדול $N! \cong \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!}{(N-K)!} \cong \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{N} N^N}{\sqrt{N-K} (N-K)^{N-K}} \cong \lim_{N \rightarrow \infty} N^K \quad (16)$$

נציב זאת ב (15) ונסדר:

$$P(K) = \frac{\lambda^K}{K!} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N^K}{N^K} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-K} \quad (17)$$

כמעט הגענו, מזניח את K בחזקה $(1 - \frac{\lambda}{N})^{N-K}$ כי $N \rightarrow \infty$ ונשתמש בהגדרתו של e :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^N = e^{-\lambda} \quad (18)$$

נציב ב (14) באלגנטיות ונקבל את התוצאה.

$$P(K) = \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} \quad (19)$$