מתמטיקה
שכדאי לדעת

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

על השורש הריבועי של שתיים ושורשים אחרים

פרופ' דוד גילת

בית הספר למדעי המתמטיקה
אוניברסיטת תל אביב

אוניברסיטת תל אביב
TEL AVIV UNIVERSITY

מתמטיקה
שכדאי לדעת

על השורש הריבועי של שתיים ושורשים אחרים

פרופ' דוד גילת

בית הספר למדעי המתמטיקה
אוניברסיטת תל אביב

על השורש הריבועי של שתיים ושורשים אחרים

כתיבה: **פרופ׳ דוד גילת** בית הספר למדעי המתמטיקה אוניברסיטת תל אביב
מנהל פרויקט **כדאי לדעת**: פרופ׳ אילון סולן
עריכה לשונית: ד״ר דנה ברעם
רכזת אדמיניסטרטיבית: מיכל זוהר
עיצוב גרפי ועימוד: ניצן-שמיר מעצבים
איורים: מירל גולדנברג
איור עטיפה: shutterstock
כתובת האתר **כדאי לדעת**: goodtoknow.tau.ac.il

תצלומים: ויקיפדיה

תודתי לחברי ועמיתי פרופ׳ אילון סולן, שביקורתו על טיוטה מוקדמת של החוברת הובילה לשיפור ניכר שלה.

זכויות הקניין הרוחני, לרבות זכויות היוצרים והזכות המוסרית של היוצרים בחומר זה, מוגנות.

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, לתרגם, וכן אין לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחר את החומר ו/או כל חלק שהוא מהחומר הזה. כמו כן אין לעשות שימוש מסחרי כלשהו בחומר זה, אלא אך ורק לאחר קבלת רשות מפורשת בכתב מאוניברסיטת תל אביב, בית הספר למדעי המתמטיקה.

תוכן

1. מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים	**4**
1.1. המספרים הטבעיים והמספרים השלמים	4
1.2. המספרים הרציונאליים: פעולת החילוק ופירוק לגורמים ראשוניים	5
1.3. תגלית מפתיעה: מספרים שאינם רציונאליים	12
2. שורש של שתיים - כמה זה?	**18**
3. האירציונאליות של שורשים	**20**
4. הכללה של גאוס	**23**
5. ביבליוגרפיה	**25**
6. דמויות המופיעות בחוברת	**26**
7. פתרונות התרגילים	**28**

1. מהמספרים הטבעיים למספרים הממשיים

1.1 המספרים הטבעיים והמספרים השלמים

מוקדם למדי בילדותנו, עוד בטרם למדנו לזהות את סימניהם של המספרים הטבעיים (...1,2,3), אנו מתוודעים אליהם, לומדים לספור באמצעותם ובהמשך לערוך פעולות חשבון פשוטות ביניהם, לחבר אותם זה לזה ולהכפילם זה בזה. אנו יודעים ומבינים ש-$7+6=13$, $7\times 6=42$ וכיוצא באלה. עד מהרה אנו קולטים באופן אינטואיטיבי גם את החוקים הבסיסיים של פעולות החשבון, עוד לפני שטרחו לנסח אותם במפורש בעבורנו:

חוקי החילוף של החיבור והכפל: $a+b = b+a$ $\quad$ $a\cdot b = b\cdot a$

חוקי הקיבוץ של החיבור והכפל: $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ $\quad$ $(a+b)+c = a+(b+c)$

חוק הפילוג של הכפל לגבי החיבור: $c\cdot(a+b) = c\cdot a+c\cdot b$

אנו נעזרים בהם, במודע או שלא במודע בעת עריכת חישובים.

בשלב מאוחר יותר מתעורר הצורך בפעולת חיסור, שהיא הפעולה ההפוכה לפעולת החיבור. אלא שכאן אנחנו נתקלים בקושי מסוים: ברור לנו מה המובן של ההפרש בין שני מספרים טבעיים, $n-m$, כאשר המחוסר n גדול מהמחסר m. למשל, אם מחירו של עפרון 7 שקלים ומשלמים עבורו במטבע של 10 שקלים, העודף שיתקבל הוא $10-7=3$ שקלים. אך כאשר המחסר שווה למחוסר או גדול ממנו מופיעה אי בהירות. קושי זה הוליד את המספרים **השליליים** (ובכללם אפס, כדי לאפשר חיסור של מספרים שווים זה מזה), ויחד עם המספרים הטבעיים הם **המספרים השלמים** (...,3 ,2 ,1 ,0 ,1- ,2- ,3-...). בתחום המספרים השלמים אפשר לערוך חיבור ואת היפוכו החיסור, וכן גם כפל, תוך כדי שימור כל החוקים הבסיסיים של פעולות החשבון (כדי לשמר את חוק הפילוג חייבים להגדיר $(-1)\cdot(-1)=1$, וכפועל יוצא מהגדרה זו - מכפלה של שני מספרים שליליים כלשהם היא מספר חיובי).

1.2 המספרים הרציונאליים:

פעולת החילוק ופירוק לגורמים ראשוניים

היפוך פעולת הכפל בשלמים מצריך הרחבה נוספת של המספרים, כי לא כל שני מספרים שלמים מתחלקים זה בזה. למשל, 36 אינו מתחלק ב-15 בתחום המספרים השלמים: ניסיון החילוק מותיר שארית 6 שהיא גדולה מ-0 וקטנה מ-15. בעיה דומה מתעוררת כאשר מנסים לחלק מספר שלם חיובי במספר שלם גדול ממנו. כדי להבין מתי מספר טבעי שלם חיובי מתחלק במספר טבעי אחר, או באופן שקול - מתי המספר הראשון הוא כפולה שלמה של השני, יש לדון תחילה בפירוק של מספר טבעי לגורמים ראשוניים. כזכור, מספר טבעי (שונה מ-1) הוא **ראשוני** אם אין לו מחלקים אחרים זולת הוא עצמו ו-1 (על פי ההגדרה, מטעמי נוחות המספר 1 אינו נחשב ראשוני). המספרים 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 הם עשרת המספרים הראשוניים הראשונים (מה הם עשרת הראשוניים הבאים?).

לעומת זאת, 36 לדוגמה - $36 = 4\cdot 9 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 = 2^2\cdot 3^2$ - אינו ראשוני אלא הוא מספר **פריק**: הוא מתפרק לגורמים שונים מ-1, כלומר יש לו מחלקים שונים ממנו עצמו ומ-1. בעוד שאפשר להסתפק במספר 1 לבדו כדי לבנות כל מספר טבעי באמצעות פעולת חיבור (1=1, 2=1+1, 3=1+1+1 וכך הלאה), שום מספר יחיד אינו מסוגל לבנות את כל המספרים הטבעיים באמצעות פעולת כפל. אם, למשל, ננסה להשתמש במספר 2 כאבן בניין, נקבל רק את המספרים - שהם חזקות של 2. אם נוסיף לאבני הבניין את 3, יתקבלו רק מספרים שהם כפולות של 2 או של 3 (ולא כולן). אבל את 5 ואת 7, למשל, או אף את 21 - לא נקבל. ואם נוסיף גם אותם לאבני הבניין שלנו, לא נוכל לקבל את המספר 211 למשל ($2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1= 211$), כי הוא אינו כפולה של אף אחת מאבני הבניין שבחרנו (חילוק של 211 בכל אחד מהם ייתן שארית 1). עם כל מספר סופי של מספרים ראשוניים שנבחר כאבני בניין נוכל לעשות אותו "טריק" שעשינו עם 2, 3, 5, 7, כלומר לכפול את כולם, להוסיף למכפלתם 1 ולקבל מספר טבעי שאינו כפולה של אף אחת מאותן אבני בניין. אנו רואים אפוא שאין אפילו קבוצה סופית אחת של מספרים ראשוניים שדי בה כדי לבנות את כל המספרים הטבעיים באמצעות כפל. האם זוהי הוכחה שיש אין-סוף מספרים ראשוניים? לא לגמרי, כי אולי אין בכלל קבוצה חלקית של מספרים טבעיים שממנה אפשר לייצר את כל המספרים הטבעיים באמצעות כפל. בכל זאת, כפי שכבר היה ידוע לחכמי יוון הקדומה, התרגיל שלנו מאפשר להוכיח את המשפט:

יש אין-סוף מספרים ראשוניים (שום קבוצה סופית שלהם אינה מכילה את כולם).

הוכחה: נוכיח את הטענה שבסוגריים, שהיא ההגדרה של האין-סופיות: קבוצה היא אין-סופית אם ורק אם שום מספר סופי של איבריה אינו מכיל את כולה. לשם כך נראה שאם נתונה קבוצה סופית כלשהי של מספרים ראשוניים, אפשר תמיד למצוא מספר ראשוני נוסף השונה מכל אלה שבקבוצה. ובכן, נסמן את איברי הקבוצה הסופית הנתונה ב-p_1, p_2,..., p_n, ובהתאם לתרגיל שהוצג לעיל נסתכל במכפלתם ועוד 1 שנסמנה ב-N: $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n+1$. אם המספר N הוא ראשוני, אזי מצאנו ראשוני (N עצמו) השונה מכל איברי הקבוצה; ואם N אינו ראשוני, כי אז הוא פריק ויש לו מחלקים השונים מ-1 ומעצמו. המחלק הקטן ביותר (שאינו 1) של N חייב להיות ראשוני כי אחרת הוא עצמו, ולכן N, מתחלק במספר קטן יותר. יש אם כן למספר N מחלק ראשוני. אבל N אינו מתחלק באף אחד מרשימת ה-p_1,..., p_n, כי חילוק N בכל אחד מהם מותיר שארית 1. לכן המספר הראשוני המחלק את N שונה מכולם, והקבוצה הסופית הנתונה של המספרים הראשוניים אינה מכילה את כל המספרים הראשוניים. **מש"ל.**

(מש"ל הן ראשי תיבות של "מה שהיה להוכיח"; אותיות אלה מציינות סיום של הוכחה.)

הוכחה זו, על אף קדמוניותה, נחשבת בעיני רבים לאחת ההוכחות היפות של המתמטיקה לדורותיה.

הערה: המספר N המופיע בהוכחה הוא לפעמים ראשוני, כמו למשל $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11+1= 2{,}311$ ולפעמים פריק, כמו למשל $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13+1=30{,}031=59 \cdot 509$. הדבר תלוי בקבוצת המספרים הראשוניים שנבחרה להגדיר את N.

א ודאו שהמספר 2,311 הוא אכן מספר ראשוני.

מי שניסה לפתור את התרגיל או עיין בדף הפתרונות שבסוף החוברת ודאי הבחין שדרוש מאמץ לא מבוטל להכריע אם מספר טבעי נתון, אף אם הוא קטן יחסית (כמו 2,311), הוא ראשוני או פריק. ההכרעה אם מספר טבעי גדול מאד הוא ראשוני או פריק, ולא כל שכן פירוקו לגורמים ראשוניים, היא אכן בעיה קשה. כדאי לדעת - אף מבלי להבין זאת בשלב זה - ששיטות ההצפנה המתקדמות של ימינו, החיוניות לאבטחת מידע במערכות התקשורת האלקטרונית, מבוססות

גם על קושי זה: הקושי לפרק מספרים גדולים מאד, לעתים בני מאה ספרות ויותר, למכפלה של שני גורמים, גם אם ידוע מראש שהם פריקים. הביטוי "בעיה קשה" מכוון לכך שאפילו המחשבים החזקים ביותר של ימינו זקוקים למשך זמן בלתי סביר לפצח את הבעיה. בתולדות המתמטיקה יש דוגמה מאלפת המצביעה על הקושי להכריע בין ראשוניותו לבין פריקותו של מספר טבעי גדול: המתמטיקאי הצרפתי החשוב, בן המחצית הראשונה של המאה ה-17, פְּיֶר דֶה פֶּרְמָה, חשב לתומו שכל המספרים הטבעיים שהמבנה שלהם הוא $F_m = 2^{2^m}+1$ עבור $m = 0,1,2,3,...$ הם ראשוניים. אכן, עד $m = 4$ כולם נמצאו ראשוניים:

$$F_0 = 2^{2^0}+1 = 2^1+1 = 2+1 = 3$$
$$F_1 = 2^{2^1}+1 = 2^2+1 = 4+1 = 5$$
$$F_2 = 2^{2^2}+1 = 2^4+1 = 16+1 = 17$$
$$F_3 = 2^{2^3}+1 = 2^8+1 = 256+1 = 257$$
$$F_4 = 2^{2^4}+1 = 2^{16}+1 = 65,536+1 = 65,537$$

והנה, כ-70 שנה אחרי מותו של פרמה הגיע לֵאוֹנָרְד אוֹילֶר הגדול והפריך את טענת קודמו. אוילר מצא - F_5 הוא מספר פריק והציג אותו כמכפלה של שני גורמים ראשוניים:

$$F_5 = 2^{2^5}+1 = 2^{32}+1 = 4,294,967,297 = 641\cdot 6,700,417$$

במאה ה-18, רק אשף מתמטי כאוילר היה מסוגל להתמודד עם הכרעה באשר לראשוניות או לפריקות של מספר בן 10 ספרות עשרוניות (שערכו יותר מארבעה מיליארד). איך עשה זאת ללא אמצעי החישוב האלקטרוניים שבידינו כיום? אוילר לא גילה לנו את הסוד בשלמותו, אך בדרכו למציאת הפירוק לגורמים ראשוניים של F_5, הוא הוכיח שכל מחלק של F_n חייב להיות שווה ל-(1 + כפולה של 2^{n+1}). ואכן, הנה למשל המחלק 641: $641=10\cdot 64+1=10\cdot 2^6+1=10\cdot 2^{5+1}+1$. מאז נמצאו עוד "מספרי פרמה" (מספרים שהמבנה שלהם הוא $F_m = 2^{2^m}+1$) פריקים לא מעטים. כיום משערים ש**כל** מספרי פרמה F_m עבור $5\leq m$ הם פריקים, אך איש אינו יודע להוכיח או להפריך השערה זו. בפרט, לא ידוע אם יש מספר אין-סופי של מספרי פרמה ראשוניים. הודות לשיטות המתקדמות ולאמצעי החישוב של ימינו, המרוץ אחרי מספרים ראשוניים גדולים מאד הוא בעיצומו. בינואר 2016, המספר הראשוני הידוע הגדול ביותר הוא בעל יותר מ-17 מיליון ספרות עשרוניות.

ראינו שבקרב מספרי פרמה שהמבנה שלהם הוא $F_m = 2^{2^m}+1$ יש ערכי m (למשל $m=3$) שעבורם F_m הוא מספר ראשוני ויש כאלה שעבורם הוא פריק (למשל $m = 5$). מספרים שהמבנה שלהם הוא $G_n = 2^n+1$ ושבהם n (מעריך החזקה של 2) איננו בעצמו חזקה של 2, כלומר אין

m שעבורו $n=2^m$ - הם כולם מספרים פריקים. כדי להוכיח טענה זו, נראה תחילה שכאשר $n=2m+1$ הוא מספר אי-זוגי, אזי לכל מספר ממשי x מתקיים השוויון

$$x^n+1=x^{2m+1}+1=(x+1)(x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}-...+x^2-x+1)$$

בסוגריים הימניים מופיע סכום עם סימנים מתחלפים שבו כל החזקות הזוגיות של x (לרבות $x^0=1$) מופיעות בסימן חיובי וכל החזקות האי-זוגיות בסימן שלילי. בדרך זו, כאשר נכפיל את הגורמים שבסוגריים אלה באלה על פי חוק הפילוג ("נפתח את הסוגריים"), יתקזזו כל חזקות הביניים של x ויישארו רק החזקות הקיצוניות - הגדולה ביותר x^{2m+1} והקטנה ביותר $x^0=1$, ושתיהן בסימן חיובי. וכך מוכח השוויון. אולם אם במשוואה $G_n=2^n+1$, n אינו חזקה של 2, כי אז יש ל-n גורם אי-זוגי $2m+1$ (אולי n עצמו) ואז אפשר לכתוב $n=k(2m+1)$. נציב $x=2^k$ בשוויון האחרון ונקבל את הפירוק המבוקש של $G_n=2^n+1$ למכפלה של שני גורמים:

$$2^n+1=2^{k(2m+1)}+1=(2^k)^{2m+1}+1=$$
$$(2^k+1)[(2^k)^{2m}-(2^k)^{2m-1}+...+1]=(2^k+1)(2^{k\cdot 2m}-2^{k(2m-1)}+...+1)$$

מרבית המספרים הראשוניים הגדולים שנמצאו צורתם $M_p=2^p-1$, עם p ראשוני. מספרים אלה נקראים "מספרי מֶרְסֶן" על שם התיאולוג והמדען הצרפתי מָרִין מֶרְסֶן בן המאה ה-17, שהתחיל לחקור אותם במטרה לאתר מספרים ראשוניים. גם כאשר p ראשוני, לא כל המספרים האלה הם ראשוניים. למשל $M_{11}=2^{11}-1=2047=23\cdot 89$ הוא פריק. בכל אופן, כאשר p אינו מספר ראשוני, המספר M_p הוא תמיד מספר פריק. כדי להיווכח בכך, נראה תחילה כי לכל מספר ממשי x ולכל מספר טבעי m מתקיים השוויון:

$$x^m-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{m-1})$$

כאשר נפתח את הסוגריים באגף ימין, יתקזזו כל חזקות הביניים של x ויישארו רק החזקות הקיצוניות שבאגף שמאל, הגדולה ביותר (m) בסימן חיובי והקטנה ביותר (0) בסימן שלילי, ובכך הוכח השוויון.

עכשיו נתבונן ב-2^n-1 לאור שוויון זה: אם n אינו ראשוני, אזי הוא מתפרק למכפלה של שני גורמים $n=k\cdot m$ (שניהם גדולים מ-1), ולכן כאשר נציב $x=2^k$ בשוויון האחרון נקבל את הפירוק המבוקש של $2^n=2^{k\cdot m}$.

$$2^n-1=2^{k\cdot m}-1=(2^k)^m-1=$$
$$(2^k-1)(1+2^k+(2^k)^2+...+(2^k)^{m-1})=(2^k-1)(1+2^k+2^{2k}+...+2^{(m-1)k})$$

אם כי החיפוש אחרי מספרים ראשוניים גדולים מתרכז בעיקרו במספרי מרסן, לא ידוע אם יש אין-סוף מספרי מרסן שהם ראשוניים.

ב הוכיחו שלכל מספר ממשי x ולכל שני מספרים טבעיים k ו- m מתקיים השוויון:

$$(x^k-1)(1+x^k+x^{2k}+\ldots+x^{(m-1)k})=(x^m-1)(1+x^m+x^{2m}+\ldots+x^{(k-1)m})$$

שימו לב שהביטויים בשני האגפים מתקבלים זה מזה בחילופי k ו- m. כמה יפה!

המספרים הראשוניים הם כולם אבני הבניין הכפליים של המספרים הטבעיים, וזהו המשפט היסודי של תורת החשבון במספרים השלמים - האריתמטיקה.

משפט - המשפט היסודי של האריתמטיקה:

כל מספר טבעי (גדול מ-1) ניתן להצגה כמכפלה של גורמים ראשוניים (כל מספר כשלעצמו נחשב למכפלה של גורם אחד). יתר על כן, הצגה זו היא יחידה עד כדי סדר הגורמים.

דוגמה: $2\cdot2\cdot3\cdot3=3\cdot2\cdot3\cdot2=36$. מכפלה של אותם גורמים ראשוניים בסדר שונה מניבה אותו מספר, אך כשמפרקים מספרים שונים לגורמיהם הראשוניים, לפחות גורם ראשוני אחד מופיע מספר שונה של פעמים בכל אחד מהמספרים. זו המשמעות של יחידות הפירוק **עד כדי סדר** הנטענת במשפט.

ג

1. הציגו את המספרים שלהלן כמכפלה של גורמיהם הראשוניים: 37, 54, 156, 2,072. בכל אחת מההצגות כִּתבו את הגורמים הראשוניים בסדר עולה וקבצו גורמים שווים לחזקה מתאימה שלהם.

37 = ______

54 = ______

156 = ______

2,072 = ______

2. מבלי לפרק את 100 לגורמיו הראשוניים, הסבירו מדוע כל גורם ראשוני המופיע בפירוק של 100 מופיע בו מספר זוגי של פעמים. הסבירו מדוע בפירוק של המספר 500 לגורמים ראשוניים מופיע הגורם הראשוני 5 מספר אי-זוגי של פעמים.

______

______

______

______

3 הוכיחו שאם $n = m^2$, אזי כל גורם ראשוני של n מופיע בפירוק שלו מספר זוגי של פעמים.

______

______

______

______

נוכיח עתה את **קיום** הפירוק של מספר טבעי לגורמים ראשוניים:

יהי $n \neq 1$ מספר טבעי כלשהו. המחלק הקטן ביותר (השונה מ-1) של n (לרבות אם זהו n עצמו) הוא בהכרח מספר ראשוני. אם אינו ראשוני - המשמעות היא שיש למחלק, ולכן ל-n, מחלק קטן יותר (מחלק של מחלק של n - הוא עצמו מחלק של n). נסמן מחלק קטן ביותר זה ב-p_1. אם $n = p_1$, אזי n עצמו הוא מספר ראשוני. אם $n \neq p_1$, כי אז יש עכשיו מספר ראשוני קטן ביותר, p_2, המחלק את n/p_1. אם $n = p_1 \times p_2$, הרי זהו הפירוק המבוקש של n, ואם $n \neq p_1 \cdot p_2$, אזי יש מספר ראשוני p_3 המחלק את n/p_1p_2, וכך הלאה. תהליך זה חייב להסתיים אחרי מספר סופי, m, של שלבים, ונקבל $n = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m$. אם לא כן, מתקבל ש-$n > p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m \geq 2^m$ לכל m טבעי (האי-שוויון $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_m \geq 2^m$ נובע מכך שכל מספר ראשוני הוא לפחות 2), וזה כמובן לא ייתכן כי לכל n נתון אפשר למצוא חזקה של 2 שהיא גדולה מ-n. בזה הוכחנו את קיום הפירוק של כל מספר טבעי לגורמים ראשוניים. קשה יותר להוכיח את **יחידות** הפירוק (כאמור, עד כדי סדר הגורמים), וההוכחה לא תוצג כאן. הקוראים מוזמנים לנסות את כוחם או לספק את סקרנותם בפנייה לספר בתורת המספרים האלמנטרית (למשל בספרו של בייקר [9], עמודים 3-4).

ד

1. פרקו את המספרים שלהלן למכפלה של גורמיהם הראשוניים: 68, 126, 1452, 3150.

68 = ____________________

126 = ____________________

1,452 = ____________________

3,150 = ____________________

2. על סמך הפירוק, קבעו אם 126 מחלק את 3150, אם 68 מחלק את 1452 ואם 68 מחלק את 3150.

____

____

____

____

3. מחלק משותף של שני מספרים הוא מספר המחלק כל אחד מהם.
מצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של זוגות המספרים בסעיף 2.

המחלק המשותף הגדול ביותר של 126 ו-3150 הוא: ______________________________

המחלק המשותף הגדול ביותר של 68 ו-1452 הוא: ______________________________

המחלק המשותף הגדול ביותר של 68 ו-3150 הוא: ______________________________

הצורך המעשי בחלקים של השלם והצורך המתמטי בפעולת החילוק (הפעולה ההפוכה לכפל) הביא להרחבת מערכת המספרים השלמים ל**שברים** - m/n, או ל**שברים מצומצמים** (שבהם למונה m ולמכנה n אין מחלקים משותפים). שברים אלה נקראים **מספרים רציונאליים**, מלשון יחס, ratio. פעולות החשבון בין המספרים הרציונאליים הוגדרו באופן שהן מקיימות את חוקי החשבון הבסיסיים. לא ניכנס כאן לפרטי הגדרות אלה מכיוון שאנו מניחים שהקוראים מכירים את המספרים הרציונאליים (כלומר את השברים) ומתמצאים בפעולות החשבון ביניהם.

1.3 תגלית מפתיעה: מספרים שאינם רציונאליים

המספרים הרציונאליים מספקים את הדרוש לכל צורך מעשי או חשבונאי, כי התוצאה של כל מדידה של גודל פיזיקלי, הנדסי, או כספי-כלכלי (כמו מרחק וזמן, שטח ונפח, כמות כסף וריבית וכיוצא באלה) היא תמיד מספר רציונאלי. לכן אין כל צורך מעשי במספרים נוספים. המספרים הרציונאליים הם קבוצה צפופה, כלומר: בין כל שני מספרים רציונאליים שונים, יש מספר רציונאלי שלישי השונה מהם (למשל הממוצע בין השניים), ולכן יש מספר בלתי מוגבל - אין-סופי - של מספרים כאלה (בררו לעצמכם מדוע בתרגיל ה). שימו לב שתכונת הצפיפות של המספרים הרציונאליים מנוגדת ניגוד גמור לתכונת המספרים השלמים: בין כל שני מספרים שלמים עוקבים a ו- $a+1$ (לאו דווקא חיוביים) אין מספרים שלמים נוספים, ולכן בין שני מספרים שלמים כלשהם יש רק מספר סופי של שלמים אחרים. על כן נהוג לומר שבעוד שהרציונאליים צפופים, השלמים מבודדים.

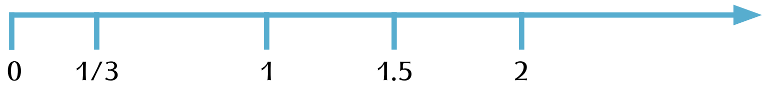
ה 1. מצאו מאה מספרים רציונאליים בין $1/2$ ל- $3/2$.

____

____

____

2. הוכיחו שאם $r<s$ הם שני מספרים רציונאליים, אזי לכל מספר טבעי n (גדול ככל שיהיה), אפשר למצוא n מספרים רציונאליים שונים בין r ל- s.



תרשים 1: ישר המספרים

עקב צפיפות המספרים הרציונאליים, נראה שאם נתאים לכל מספר רציונאלי-חיובי קטע ישר השווה לו באורכו ונבנה כמקובל את ישר המספרים (ראו תרשים 1), יתמלא הישר כולו ולא ייוותרו בו "חורים" שלא נתפסו על ידי נקודות רציונאליות (נקודות על הישר המתאימות למספרים רציונאליים). אם אמנם כך הדבר, הרי שלכל שני קטעים אפשר למצוא יחידת מידה משותפת, כלומר: קטע הנכנס לכל אחד מהקטעים הנתונים מספר שלם של פעמים ומכסה אותו בדיוק. לדוגמה: קטע שאורכו 0.5 ס"מ נכנס פעמיים בדיוק לתוך קטע שאורכו 1 ס"מ ושלוש פעמים בדיוק לקטע שאורכו 1.5 ס"מ. ולכן קטע שאורכו 0.5 ס"מ הוא יחידת מידה משותפת לקטעים 1 ס"מ ו-1.5 ס"מ. לפי יחידת מידה זו, אורכו של "1" (קטע שאורכו 1 ס"מ) הוא 2 יחידות ואורכו של "1.5" הוא 3 יחידות. גם קטע שאורכו $1/6$ ס"מ יכול להיות יחידת מידה משותפת לשני קטעים אלה. לפי יחידה זו, אורכו של "1" הוא 6 יחידות ואילו אורכו של "1.5" הוא 9 יחידות. האם קטע שאורכו $1/3$ הוא יחידת מידה משותפת לשני הקטעים הללו? קטע שאורכו $1/4$? מטבע הדברים, המעניינת ביותר היא יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר.

I

1. מהי יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר לקטעים שאורכם 1 ס"מ ו-1.5 ס"מ, ומדוע?

2. מצאו יחידת מידה משותפת ל- $2/3$ ול- $4/9$.

3. מצאו יחידת מידה משותפת נוספת לגדלים בתרגיל 2
ומצאו את יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר במקרה זה.

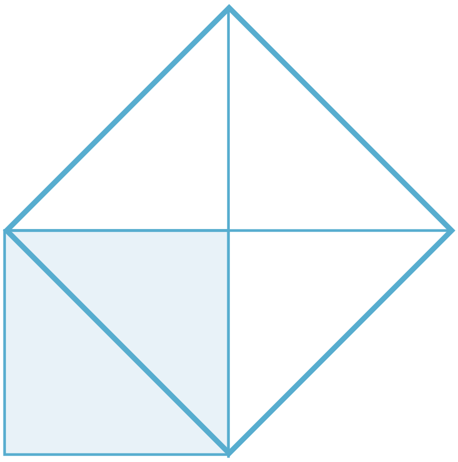
4. מצאו את יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר ועוד שתי מידות משותפות אחרות ל-10 ול-125 (שימו לב: אנו מזהים אורכי קטעים עם מספרים).

5. הוכיחו שלכל שני מספרים רציונאליים (קטעים בעלי אורך רציונאלי) יש יחידת מידה משותפת.

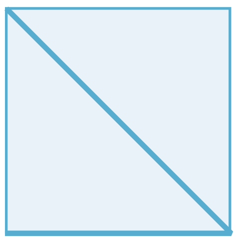
לא ייפלא אפוא מה רבה הייתה הפתעתם של היוונים הקדמונים - פיתגורס ותלמידיו במאה ה-6 לפני הספירה - לנוכח תגלית מרעישה: נמצאו קטעים ישרים ש**אין להם יחידת מידה משותפת**, כלומר אין בעבורם יחידת אורך שבאמצעותה אפשר למדוד את אורכם במספר שלם של יחידות. לא מדובר בכך שלא חיפשנו די ואם רק נוסיף לחפש אולי נמצא בעתיד. באופן עקרוני ומהותי

אין אפשרות למצוא יחידת מידה משותפת לקטעים כאלה, ואף אם נחפש עוד ועוד לא נמצא, כי פשוט אין כזאת. חכמי יוון הקדמונים ידעו גם לתרגם את התגלית הגיאומטרית הזאת לשפת המספרים של האריתמטיקה. הם הבינו שקיומם של קטעים חסרי מידה משותפת מחייב הימצאות של "חורים" בישר המספרים. לחלופין, כדי לסגור את הפערים הללו יש לאמץ מספרים (אורכי קטעים) שאין אפשרות להציגם כשבר פשוט, כלומר יחס בין שני מספרים שלמים. מספרים אלה נקראים **אירציונאליים**.

הדוגמה הפשוטה והידועה ביותר של שני קטעים שאין להם יחידת מידה משותפת היא אלכסון של ריבוע וה**צלע** שלו. האלכסון מחלק את הריבוע לשני משולשים ישרי זווית שווי שוקיים חופפים, שבהם האלכסון הוא היתר וצלעות הריבוע הם הניצבים (תרשים 2).



תרשים 3



תרשים 2

קל לראות שאת הריבוע הבנוי על האלכסון מחלקים אלכסוניו לארבעה משולשים, שכל אחד מהם חופף למחצית הריבוע המקורי (תרשים 3). מכיוון ששטח של ריבוע מתקבל באמצעות ריבוע אורך צלעו, הרי שהריבוע על האלכסון גדול בשטחו פי 2 מהריבוע שעל הצלע; לחלופין, אורך האלכסון גדול פי $\sqrt{2}$ (מספר שאם נעלה אותו בריבוע נקבל 2) מאורך הצלע. מאחר שלכל שני מספרים רציונאליים יש יחידת מידה משותפת (ראו סעיף 5 בתרגיל ו לעיל), הטענה שהאלכסון והצלע של הריבוע הם חסרי יחידת מידה משותפת שקולה אפוא לטענה שאין מספר רציונאלי שריבועו שווה ל-2. כלומר: $\sqrt{2}$ הוא אירציונאלי - אי-אפשר להציג אותו כשבר פשוט. היוונים השאירו שתי הוכחות לטענה זו, האחת גיאומטרית והאחרת בעלת אופי אריתמטי. שתיהן מצויות בספר המונומנטאלי "יסודות" (Elements) של אוקלידס (בערך משנת 300 לפני הספירה). נציג עתה הוכחה אריתמטית שונה במקצת מההוכחה היוונית ל-

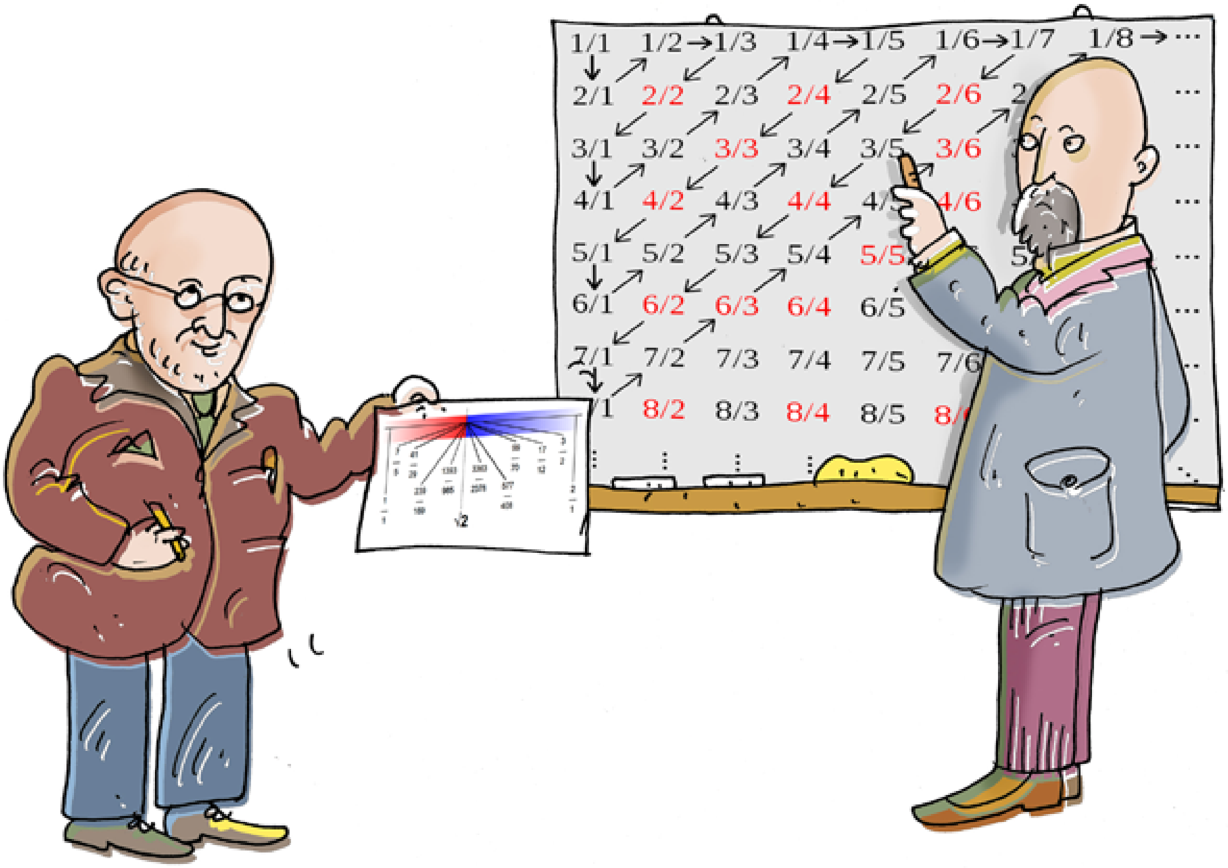
טענה: **אין מספר רציונאלי שריבועו הוא 2. לחלופין: $\sqrt{2}$ הוא מספר אירציונאלי.**

הוכחה: נראה שאם $\sqrt{2}$ היה רציונאלי, היינו מגיעים למסקנה בלתי אפשרית ומכאן נסיק ש- $\sqrt{2}$ אינו יכול להיות רציונאלי והוא חייב להיות אירציונאלי. הוכחה כזאת נקראת **הוכחה בדרך השלילה**, כי בתחילתה שוללים את הטענה שרוצים להוכיח. נניח אם כן ש- $\sqrt{2} = a/b$ (a,b הם מספרים טבעיים). נעלה את שני אגפי השוויון הזה בריבוע ונקבל $2 = a^2/b^2$, ולאחר שנכפול את שני אגפי השוויון שנוצר ב- b^2, נקבל $2b^2 = a^2$. בפירוק אגף שמאל של שוויון זה לגורמים ראשוניים, הגורם 2 מופיע מספר אי-זוגי של פעמים (ראו סעיף 3 בתרגיל ג), ואילו בפירוק אגף ימין אותו גורם מופיע מספר זוגי של פעמים (זכרו ש-0 נחשב מספר זוגי). לפי יחידות הפירוק לגורמים ראשוניים במשפט היסודי של האריתמטיקה, שני מספרים כאלה אינם שווים, ולכן שוויון זה אינו אפשרי. וזוהי המסקנה הבלתי אפשרית המובטחת המוכיחה את הטענה. **מש"ל.**

המעוניינים לבחון את שתי ההוכחות היווניות, את ההבדלים ביניהן ואת היסוד המשותף לשתיהן, מוזמנים לעיין בפרק 4 בספרם של הָאנְס רָדֶמָאכֶר ואוֹטוֹ טֶפְּלִיץ [7]. הערות היסטוריות מחכימות על הנושא אפשר למצוא בפרק הראשון בספרו של טפליץ [8]. במשך הדורות הומצאו הוכחות רבות לאירציונאליות של $\sqrt{2}$, והוכחות נוספות ממשיכות להופיע בספרות בעשרות השנים האחרונות. חמש הוכחות שונות לטענה מסוקרות בפרק הפותח של מִיקְלוֹש לָצְ'קוֹבִיץ' [6]. הוכחה יפה במיוחד מוצגת במאמרו של אַפּוֹסְטוֹל [1].

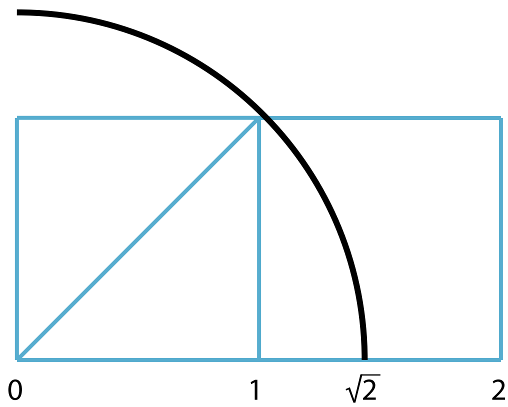
קשה להפריז בחשיבות גילוי קיומם של מספרים אירציונאליים והשפעתו על התפתחות המתמטיקה במשך ההיסטוריה. גילוי זה הוביל לשינוי מהפכני, שהתגבש בהדרגה, בהבנת עצם המושג מספר. המספרים הרציונאליים הם כאמור צפופים - בין כל שניים יש שלישי השונה מהם, ולכן בעצם יש ביניהם מספר בלתי מוגבל (אין-סופי) של מספרים רציונאליים נוספים. אך למרות הצפיפות הגדולה, יש בתוכם "חורים" שבהם שוכנים המספרים האירציונאליים. אכן, מבנה מסובך להפליא! במחצית השנייה של המאה ה-19 הוכיח המתמטיקאי הגרמני גֵאוֹרְג קָנְטוֹר (1845-1918) במחקריו פורצי הדרך בתורת הקבוצות - תורה שהוא עצמו יזם ופיתח - שבמובן מסוים ומוגדר היטב יש יותר מספרים אירציונאליים מאשר רציונאליים: בעוד שהמספרים הרציונאליים ניתנים למנייה, כלומר לסידור בשורה (אין-סופית) בזה אחר זה בדומה לסידורם של המספרים הטבעיים, כל ניסיון לסדר באופן כזה את המספרים האירציונאליים מועד מראש לכישלון - שכן אי-אפשר למצות את כולם באופן זה. לא נעסוק כאן בסוגיות בסיסיות אלה בתורת הקבוצות. הקוראים מוזמנים לעיין בספרות המתאימה, למשל בספרו של אברהם הלוי פרנקל [10].

כל המספרים הרציונאליים והאירציונאליים יחדיו הם המספרים **הממשיים**. במשך מאות רבות של שנים שימשו המספרים הממשיים את המתמטיקה מבלי שהבינו את מהותם הבנה יסודית. במחצית השנייה של המאה ה-19 הציע המתמטיקאי הגרמני רִיכָּרְד דֶּדֶקִינְד (1916-1831) דרך לבנות את כל המספרים הממשיים מתוך המספרים הרציונאליים ולערוך פעולות חשבון ביניהם - חיבור וכפל והפעולות ההפוכות חיסור וחילוק. אנו יודעים שהמספרים הממשיים הם **רצף** ללא "חורים" בין השאר מתוך הממצאים של דדקינד. זוהי אחת מעובדות היסוד של האנליזה המתמטית. נשאיר גם הערות אלה לעיון עתידי.



2. שורש של שתיים - כמה זה?

כאשר אנו כותבים $\sqrt{2}$ אנו מניחים שלמספר 2 יש שורש ריבועי שאף הוא מספר; אם כן - מה גודלו של מספר זה? מאחר ש- $1 = 1^2 < 2 < 2^2 = 4$, השורש הריבועי של 2 חייב להיות גדול מ-1 וקטן מ-2. בשפה גיאומטרית: האלכסון של ריבוע ארוך מהצלע שלו וקצר מפעמיים הצלע שלו (ראו תרשים 4).



תרשים 4

האם $\sqrt{2}$ גדול מ-1.5? מ-1.4? ובכן, אם נחשב את תשעת המספרים $1.1^2, 1,2^2, \ldots, 1.9^2$, נמצא ש- $1.4^2 = 1.96$ עדיין קטן מ-2, ואילו $1.5^2 = 2.25$ גדול מ-2. ולכן $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$. כלומר, הפיתוח העשרוני של $\sqrt{2}$, שאנחנו מניחים כאן שהוא קיים, חייב להתחיל ב-1.4. בדומה לכך, כאשר נחשב את תשעת המספרים $1.41^2, \ldots, 1.49^2$ נמצא כי $1.41^2 = 1.9881 < 2 < 2.0164 = 1.42^2$ ולכן $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$. בכך צמצמנו את הטווח של ערכו המספרי של $\sqrt{2}$ לכדי מאית אחת ומצאנו שהפיתוח העשרוני שלו עד הספרה השנייה אחרי הנקודה הוא 1.41 (תרגיל: מצאו את הספרה העשרונית הבאה בפיתוח). כשנמשיך בתהליך זה נוכל להגיע, צעד אחרי צעד, לכל ספרה רצויה בהצגה העשרונית של $\sqrt{2}$. אחרי 5 שלבים, למשל, נקבל

$$1.41421^2 = 1.9999899241 < 2 < 2.0000182084 = 1.41422^2,$$

ומשום כך הפיתוח עד הספרה החמישית אחרי הנקודה העשרונית הוא 1.41421. האם התהליך הזה יסתיים אחרי מספר סופי כלשהו m של שלבים, ובשלב האחרון יתקבל פיתוח עשרוני סופי $x = 1.41421x_6x_7\ldots x_m$ כך ש- $x^2 = 2$? התשובה לכך היא שלילית. כל פיתוח עשרוני **סופי** מייצג מספר רציונאלי, שכן אפשר לכתוב אותו כשבר פשוט עם מכנה שהוא חזקה של 10 (למשל $0.54321 = 54321/10^5$). והרי כבר הוכחנו שאין מספר רציונאלי שריבועו הוא 2. הבה נסמן את הפיתוח העשרוני השלם, האין-סופי, של $\sqrt{2}$ ב- x. אמנם אין לנו דרך, או אפילו מקום או זמן, לכתוב כאן במפורש את כל הפיתוח הזה, אך כפי שראינו יש לנו אלגוריתם (מתכון חישובי) לחשב כל ספרה רצויה של x, כך שאנחנו יכולים

לחשוב בדמיוננו על x כולו. ועכשיו מתעוררת השאלה: מה המובן של $x^2 = 2$? אנו יודעים לכפול מספרים עשרוניים סופיים, אבל כיצד כופלים - או אפילו מחברים - פיתוחים אין-סופיים? מה היא, אם כן, המשמעות של x כפול x? ובכן, מבלי להיכנס להגדרה של פעולות החשבון בקרב המספרים הממשיים ובפרט האירציונאליים, אפשר ומועיל להבין את $x^2 = 2$ כך:

ככל שנשתמש ביותר ספרות עשרוניות של x, כך יתקרב הריבוע של המספר שקיבלנו ל-2.

ביתר פירוט, אם למשל תבקשו מספר שהפיתוח העשרוני של ריבועו מתחיל בספרות 1.9999, אציע לכם את 1.41421, שהוא תחילתו של הפיתוח של x עד הספרה החמישית אחרי הנקודה. אם תהיו שאפתניים יותר ותבקשו מספר שהפיתוח של ריבועו מתחיל ב-1.99...9, עם מספר תשיעיות גדול כלבבכם, אוכל גם אז - לכל מספר תשיעיות שתבחרו - להציע לכם את מספר הספרות של x הדרוש לכך ולתת לכם דרך לחשב אותן. את זה אפשר לעשות, יהיה מספר התשיעיות המבוקש גדול ככל שנרצה, וזהו פירוש הקביעה $x^2 = 1.999... = 2$. ולכן x עצמו הוא ייצוג עשרוני של $\sqrt{2}$.

ז נסו להסביר מדוע $1 = ...\ 0.999$.

ראינו שהפיתוח העשרוני של מספר אירציונאלי הוא בהכרח אין-סופי. ראוי לציין שיש גם מספרים רציונאליים שפיתוחם העשרוני הוא אין-סופי, שכן יש לזכור ששבר פשוט מועבר לכתיב עשרוני באמצעות "חילוק ארוך" של המונה במכנה. מספרים כאלה הם למשל $1/3 = 0.333...$, $1/7$ שפיתוחו מתחיל בספרות 142857 ורצף זה של 6 ספרות חוזר על עצמו ללא הפסקה בפיתוח, או $1/6 = 0.1666...$ המאפיין את שלוש הדוגמאות האלה הוא מחזוריות הפיתוחים: ספרה אחת או רצף סופי של ספרות חוזרים על עצמם לכל אורך הפיתוח, פרט אולי לתחילית סופית שונה כמו בפיתוח של $1/6$. אפשר להוכיח שהמחזוריות המופיעה בשלושת הפיתוחים הללו מאפיינת פיתוחים עשרוניים של מספרים רציונאליים, אך לא נוכיח זאת כאן (שימו לב שגם בפיתוח עשרוני סופי אפשר לראות פיתוח אין-סופי מחזורי עם מחזור המורכב מהספרה 0 ותחילית סופית כלשהי לפני האפסים, למשל $3/8 = 0.375 = 0.375000...$). כדי שפיתוח עשרוני ייצג מספר אירציונאלי הוא חייב להיות לא רק אין-סופי אלא גם אי מחזורי, וכאמור כל פיתוח עשרוני אי מחזורי מייצג מספר אירציונאלי.

3. האירציונאליות של שורשים

לאחר שהיכרנו היטב את האירציונאליות של $\sqrt{2}$, מתעוררת באופן טבעי השאלה: מה בדבר השורשים האחרים? האם למשל $\sqrt{5}$ הוא אירציונאלי? ומה באשר ל- $\sqrt[3]{2}$ או $\sqrt[5]{132}$? ובאופן כללי: כיצד מתנהג שורש מסדר כלשהו של מספר טבעי כלשהו? בפרק זה נדון באירציונאליות של המספרים שצורתם $\sqrt[n]{k}$, כאשר k ו- n הם מספרים טבעיים כלשהם. במבנה זה, עבור k=n=2 מתקבל $\sqrt{2}$, ועבור k=8 ו-n=3 מתקבל $\sqrt[3]{8}=2$ כי $8=2^3$. על פי הגדרה, $\sqrt[n]{k}$ הוא המספר הממשי **החיובי** שחזקתו ה- n-ית היא k (יש גם מספרים מרוכבים - כאשר n זוגי מדובר במספר ממשי שלילי - שחזקתם ה- n-ית היא k, אך באלה לא נעסוק כאן). ראוי לציין שכבר היוונים הקדמונים ידעו להוכיח את האירציונאליות של רבים מהשורשים האלה, אלא שבהיעדר שיטה כללית, הטיפול בכל דוגמה נחשב לבעיה נפרדת. שימו לב ש- $\sqrt[n]{k}$ יכול להיות מספר רציונאלי ואפילו מספר שלם (לדוגמה $\sqrt[4]{81}=3$ כי $k=81$ הוא חזקה $n=4$ של המספר השלם 3), ולכן לא בכל מקרה הוא אירציונאלי כמו $\sqrt{2}$. הטענה העיקרית שלנו היא ש- $\sqrt[n]{k}$ יכול להיות רציונאלי רק אם הוא שלם.

משפט: **לכל שני מספרים טבעיים k, n, השורש ה- n-י של k הוא מספר אירציונאלי אלא אם כן הוא מספר שלם, כלומר - אלא אם כן k הוא חזקה n-ית של מספר שלם.**

נציג שתי הוכחות לטענתנו, שתיהן על דרך השלילה.

הוכחה ראשונה: נניח ש- $\sqrt[n]{k}$ הוא מספר רציונאלי ונוכיח שבמקרה כזה הוא חייב להיות מספר שלם. אם כן, נניח ש- $\sqrt[n]{k}=a/b$; a,b הם מספרים טבעיים שאין להם מחלק משותף (אחרת נצמצם את השבר). כשנעלה את שני אגפי השוויון בחזקת n נקבל $k=a^n/b^n$, וכשנכפיל את שני האגפים של שוויון זה ב- b^n נקבל $kb^n=a^n$. אגף שמאל של השוויון האחרון הוא כפולה שלמה של b. אך אם $b>1$, אגף ימין איננו כפולה שלמה של b, כי הרי הֵנחנו שאין ל- a ול- b מחלק משותף ולכן אין כל חזקה של a המתחלקת ב- b. התנאי $b>1$ סותר אפוא את השוויון האחרון ולכן $b=1$ וכפועל יוצא $\sqrt[n]{k}=a/1=a$ שהוא אכן מספר שלם. **מש"ל.**

הוכחה זו קצרה ופשוטה למדי, אך היא מסתמכת באופן מהותי על תכונות התחלקות של המספרים הטבעיים ועל פירוקם לגורמים, כי רק מתוך כך יכולנו להניח שהשבר a/b מצומצם. כמו כן, לצורך סיום הטיעון אין מנוס מלהשתמש בתכונה נוספת של המספרים הטבעיים: אם p הוא גורם ראשוני של b שאינו מחלק את a, כי אז p אינו מחלק חזקה חיובית כלשהי של a. כל אלה תכונות בסיסיות של המספרים הטבעיים, הנובעות מהמשפט היסודי של האריתמטיקה בדבר פירוקו של מספר טבעי לגורמים ראשוניים ובדבר יחידות הפירוק (עד כדי סדר הגורמים).

ההוכחה השנייה, החלופית, שתוצג להלן אינה נזקקת כלל לפירוק לגורמים ראשוניים או לתכונות התחלקות כלשהן; אפילו לא נדרש לדעת מהו מספר ראשוני. ההוכחה מתבססת אך ורק על התכונה ש**בכל קבוצה חלקית (לא ריקה) של מספרים טבעיים יש מספר קטן ביותר**. זוהי תכונה כמעט מובנת מאליה של המספרים הטבעיים, והיא אכן חלק מעצם ההגדרה הפורמלית שלהם וחייבת להתקבל ללא עוררין. שימו לב שהמספרים הרציונאליים לא ניחנו בתכונה פשוטה זאת: יש קבוצות של מספרים רציונאליים שאין בהן מספר קטן ביותר; לדוגמה, בקבוצת הרציונאליים החיוביים אין מספר קטן ביותר כי לכל מספר רציונאלי חיובי r יש מספר רציונאלי חיובי קטן ממנו, למשל $r/2$.

ח 1. תנו דוגמה נוספת לקבוצת מספרים רציונאליים שאין בה מספר קטן ביותר.

2. האם בכל קבוצה של מספרים שלמים יש מספר קטן ביותר?

3. האם בכל קבוצה של מספרים שלמים שכולם גדולים מ-(-100) יש מספר קטן ביותר?

הוכחה שנייה: כמו בהוכחה הקודמת, נניח בשלילה ש- $r=\sqrt[n]{k}$ הוא מספר רציונאלי ונוכיח שהוא שלם. אם r הוא רציונאלי, אזי גם n חזקותיו הראשונות $1=r^0,\ r=r^1,\ r^2,\dots,r^{n-1},r^n=k$ הן רציונאליות (מדוע?). נסמן ב- m מכנה משותף (לאו דווקא הקטן ביותר; מכפלת כל המכנים, למשל, היא תמיד מכנה משותף) של החזקות האלה של r, ואז $m, mr, mr^2,\dots, mr^{n-1}$ יהיו מספרים שלמים. ייתכן שיש מספרי m שלמים נוספים, שעבורם $mr^0,mr^1,\dots,mr^{n-1}$ כולם שלמים. נסמן ב- M את קבוצת כל המספרים האלה. בכתיב המקובל על המתמטיקאים:

$M=\{m: m, mr, mr^2,\dots,mr^{n-1}\ \text{הם מספרים שלמים}\}$.

בכתיב זה, הסוגריים המסולסלים מסמנים שמדובר בקבוצה של עצמים כלשהם, בדרך כלל מדובר במספרים, אך לא תמיד. מהי אותה קבוצה? התשובה לכך מפורטת בתוך הסוגריים: הקבוצה היא קבוצת כל העצמים m שמאפיינת אותם (מגדירה אותם) התכונה הרשומה מימין לנקודתיים. הקבוצה M שלנו היא אם כן קבוצת כל המספרים השלמים m, ש- $mr^1,\dots,mr^{n-1}$ אף הם מספרים שלמים. שימו לב ש- $mr^n=mk$ הוא מספר שלם לכל m טבעי. כפי שראינו, M היא קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. נראה עכשיו שאם r רציונאלי אך אינו שלם, כי אז M אינה מכילה מספר קטן ביותר, בניגוד לתכונה הבסיסית של המספרים הטבעיים. ובכן, אם r אינו שלם, כי אז הוא כלוא בין שני מספרים שלמים עוקבים $q<r<q+1$ (q הוא **הערך השלם** של r). נראה עתה שלכל m בקבוצה M אפשר למצוא מספר קטן ממנו, m', שאף הוא בקבוצה M, כך שאין ב- M מספר קטן ביותר. ובכן, בהינתן מספר m בקבוצה M, נגדיר $m'=(r-q)m$, אזי m' הוא מספר שלם (כי m בקבוצה M ו- q הוא מספר שלם) וכמו כן $0<m'<m$ (כי $0<r-q<1$). הטענה ש- m' אכן ב- M נובעת מכך ש- $m'r^j$ ($j=0,1,2,\dots,n-1$) הוא הפרש בין שני מספרים שלמים ולכן אף הוא עצמו שלם. **מש"ל**.

הוכחה זו היא אולי ארוכה ומתוחכמת במקצת מקודמתה, אך מהותית היא פשוטה יותר כי היא נזקקת אך ורק לעצם ההגדרה של המספרים הטבעיים ולא לשום תכונה הקשורה לפעולות החשבון הנעשות בהם. נסו ליישם הוכחה זו למקרה הפרטי $n=2=k$ ותיווכחו כמה מעט דרוש כדי להוכיח ש- $\sqrt{2}$ הוא אירציונאלי.

4. הכללה של גאוס

ביטויים אלגבריים כמו $2x^2-3x+1$ או $5x^7+x^4+(2/3)x^3-7x-11$ וכיוצא באלה נקראים **פולינום**. המספרים הכופלים את החזקות של המשתנה x הם מקדמי הפולינום ואילו החזקה הגבוהה ביותר של x היא מעלת הפולינום. הפולינום הכללי ממעלה n הוא ביטוי שהמבנה שלו הוא $c_nx^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0$; $c_0,\ldots,c_n$ הם מספרים עם $c_n\neq 0$ (הפולינום השני לעיל הוא ממעלה 7 ומקדמיו הם $c_7=5,\ c_6=c_5=0,\ c_4=1,\ c_3=2/3,\ c_2=0,\ c_1=-7,\ c_0=-11$). למען הקיצור נסמן פולינום כלשהו ב-$p(x)$. אם נכתוב $p(x)=0$ נקבל **משוואה פולינומית** שבה הנעלם מסומן ב-x ופתרונותיה (הערכים המספריים של x המקיימים את המשוואה) הם שורשי הפולינום. בבית הספר לומדים לפתור משוואות פולינומיות ממעלה ראשונה (משוואות ליניאריות) וממעלה שנייה (משוואות ריבועיות).

נחזור כעת לענייננו העיקרי.

שימו נא לב ש-$\sqrt[n]{k}$ הוא שורש (פתרון) של המשוואה הפולינומית $x^n-k=0$ ממעלה n. זוהי משוואה פולינומית עם מקדמים שלמים ועם מקדם עליון (מקדם החזקה הגבוהה ביותר של x) שהוא 1. למשוואה פולינומית כללית כזאת $p(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_1x+c_0=0$ ($c_0,\ldots,c_{n-1}$ מספרים שלמים) יכולים להיות שורשים מרוכבים ושורשים אחרים שהם ממשיים. אשר לשורשים הממשיים של פולינום כזה - אפשר לשאול אם הם בהכרח אירציונאליים כאשר אינם שלמים בדומה למקרה שהובא בפרק הקודם, שבו כל המקדמים, פרט ל-$c_0=-k$, מתאפסים. התשובה לשאלה זאת היא חיובית, כפי שהוכיח במאה ה-19 מי שנחשב לאחד מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, **קָרְל-פרִידְרִיךְ גָאוּס**. נציג תוצאה זו של גאוס כ-

משפט (גאוס): **שורש ממשי של משוואה פולינומית עם מקדמים שלמים ועם מקדם עליון 1 הוא מספר אירציונאלי או מספר שלם.**

בשתי ההוכחות של המקרה הפרטי $p(x)=x^n-k=0$, שהוצגו בפרק 3, מצויים כל המרכיבים להוכחות מקבילות של התוצאה של גאוס בשלמותה. נציג כאן רק הוכחה אחת, והקוראים יוכלו להכליל את ההוכחה השנייה למשפט של גאוס. קוראים המתקשים במשימה זו מוזמנים לעיין במאמר [4], שמצויה בו ההוכחה השנייה לפרטיה.

הוכחה ראשונה: יהי r שורש ממשי של המשוואה $p(x)=x^n+c_{n-1}x^{n-1}+...+c_1x+c_0=0$; n הוא מספר טבעי וכל המקדמים $c_0,c_1,...,c_{n-1}$ הם מספרים שלמים. אם r הוא רציונאלי, נציג אותו כשבר מצומצם $r=a/b$ (אם הוא מספר רציונאלי שלילי, נבחר $0<b$ ו- $a<0$). מאחר ש- r הוא שורש של הפולינום $p(x)$, נקבל $p(r)=p(a/b)=0$. נכפול את שני אגפי השוויון $p(a/b)=a^n/b^n+c_{n-1}a^{n-1}/b^{n-1}+...+c_1a/b+c_0=0$ ב- b^n ונקבל:

$$b^np(a/b)=a^n+c_{n-1}a^{n-1}b+c_{n-2}a^{n-2}b^2+...+c_1ab^{n-1}+c_0b^n=0$$

וכשנבודד את האיבר המוביל a^n באגף שמאל, נקבל:

$$a^n=-(c_{n-1}a^{n-1}b+c_{n-2}a^{n-2}b^2+...+c_0b^n)$$

אגף ימין של שוויון זה מתחלק ב- b (כי כל אחד מהמחוברים בסכום הוא כפולה שלמה של b), אבל אם $b>1$, הרי אגף שמאל אינו מתחלק ב- b (משום של- a ול- b אין מחלקים משותפים). ולכן $b=1$ שפירושו $r=a$ הוא מספר שלם. **מש"ל**.

ט 1. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אירציונאלי.

2. תנו דוגמה לשני מספרים אירציונאליים שסכומם מספר רציונאלי ודוגמה אחרת לשני מספרים אירציונאליים שהפרשם רציונאלי.

3. האם סכום של מספר רציונאלי ומספר אירציונאלי יכול להיות מספר רציונאלי?
האם מכפלה של מספר רציונאלי שונה מ-0 ומספר אירציונאלי יכולה להיות מספר רציונאלי?

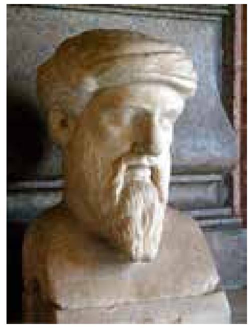
5. ביבליוגרפיה

1. T. M. Apostol. Irrationality of the Square-Root of Two - A Geometric Proof. **Am. Math. Monthly, 107 (2000) pp. 841-842** (reproduced in [2], p. 107).
2. A. T. Benjamin & E. Brown (editors). Biscuits of Number Theory. **MAA 2009**.
3. R. Gaunt & G. Robson. The Irrationality of $\sqrt{2}$. **Am. Math. Monthly, 63, (1956) p. 247**.
4. D. Gilat, Gauss's Lemma and the Irrationality of Roots Revisited. **Math. Magazine, 85 (2012) pp. 114-116**.
5. E. Halfar. The Irrationality of $\sqrt{2}$. **Am. Math. Monthly, 62 (1955) p. 437**.
6. M. Laczkovich. Conjecture and Proof. **Math. Assoc. Am. (MAA) 2001**.
7. H. Rademacher & O. Toeplitz. The Enjoyment of Mathematics (English edition of the German 1933-original). **Princeton University Press 1957**.

מהדורה עברית של הספר, שכותרתו **על מספרים ועל צורות - דוגמאות של חשיבה מתמטית לחובבי מתמטיקה**, הופיעה ב-2016 ביוזמת בית הספר למדעי המתמטיקה והיחידה לנוער שוחר מדע על שם דב לאוטמן באוניברסיטת תל אביב.

8. O. Toeplitz. The Calculus: A Genetic Approach. **U .of Chicago Press1963** .
9. A. Baker. A Concise Introduction to the Theory of Numbers. **Cambridge U. Press 1983**.
10. אברהם הלוי פרנקל. מבוא למתמטיקה, כרך שני, חטיבה ראשונה: תורת הקבוצות. הוצאת מאגנס, האוניברסיטה העברית והוצאת מסדה, ירושלים תשי"ד 4591.

6. דמויות המופיעות בחוברת


CC BY-SA 3.0

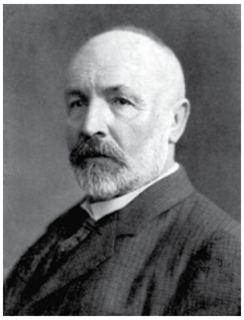
פִּיתָגוֹרָס (בקירוב 582-496 לפני הספירה) היה מתמטיקאי ופילוסוף יווני. הוא הקים קהילה דתית-פילוסופית שחבריה האמינו כי אפשר לתאר את כל העולם באמצעות יחסים מתמטיים בין מספרים טבעיים. הם דגלו באורח חיים של פשטות המוקדש לעיון ולהתבוננות וכן דגלו בצמחונות. משפט פיתגורס, הקובע שריבוע היתר במשולש ישר זווית שווה לסכום ריבועי הניצבים, נקרא כמובן על שמו. גם גילוי המספרים שאינם רציונאליים מיוחס לקהילה הפיתגורית.

אוֹקְלִידֶס (365-275 לפני הספירה) היה מתמטיקאי יווני שחי באלכסנדריה שבמצרים ונחשב לאבי הגיאומטריה. הוא ערך בצורה מסודרת את הידע המתמטי עד תקופתו בספר "יסודות", שהיה ספר הלימוד העיקרי במתמטיקה עד סוף המאה ה-19.

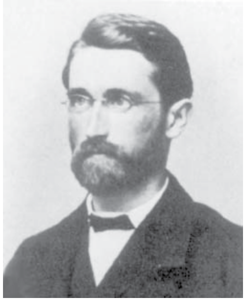
מָרִין מֶרְסֶן (1648-1588) היה תיאולוג, פילוסוף ומוזיקולוג צרפתי. הוא נחשב אבי האקוסטיקה (תורת הקול) וממציא מספרי מרסן בתורת המספרים.

פְּיֶר דֶה פֶּרְמָה (1665-1601) עבד לפרנסתו כעורך דין עבור השלטונות בטולוז שבצרפת ובזמנו הפנוי עסק בחקר המתמטיקה. הוא תרם תרומות חשובות בתורת המספרים, בגיאומטריה, בחשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי ובהסתברות. השערת פרמה בתורת המספרים, שזכתה לכינוי "המשפט האחרון של פרמה", נותרה בעיה בלתי פתורה במשך כ-350 שנה, עד שפתר אותה אָנְדְרוּ וָיילְס בשנת 1995.

לֵאוֹנָרְד אוֹילֶר (1783-1707) היה מתמטיקאי שוויצרי, אך בבגרותו שהה בעיקר בסנט-פטרבורג שברוסיה ובברלין. הוא תרם תרומות פורצות דרך כמעט בכל ענפי המתמטיקה. אוילר נחשב למתמטיקאי הפורה ביותר בכל הזמנים. הוא הותיר בעיזבונו עשרות מחקרים שהמשיכו להתפרסם בכתבי העת המתמטיים שנים רבות אחרי מותו. "אוֹפֶּרָה אוֹמְנִיָה", המפעל של כל כתביו המדעיים שהחל לצאת לאור בשנת 1911, משתרע עד כה על פני 76 כרכים, והמלאכה טרם הושלמה.



גֵאוֹרְג קָנְטוֹר (1918-1845) היה מתמטיקאי גרמני שהבין שיש גדלים שונים של אין-סוף. הוא פיתח את תורת הקבוצות.



רִיכָרְד דֶדֶקִינְד (1916-1831) היה מתמטיקאי גרמני. אחת מתרומותיו החשובות היא הגדרת המספרים הממשיים באמצעות מושג שנקרא "חתכי דדקינד": מספר ממשי הוא חלוקה של המספרים הרציונאליים לשתי קבוצות באופן שכל מספר בקבוצה הראשונה גדול מכל מספר בקבוצה השנייה.

קָרְל פְרִידְרִיך גָאוּס (1855-1777) היה מתמטיקאי, פיזיקאי ואסטרונום גרמני, שהיה מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים. הוא הוכיח בין השאר את המשפט היסודי של האלגברה - לכל פולינום ממעלה n יש n שורשים מרוכבים.

7. פתרונות התרגילים

א : ודאו שהמספר 2311 הוא אכן מספר ראשוני.

אפשר לערוך רשימה של כל המספרים הראשוניים הקטנים מ-2311 ולבדוק ש-2311 אינו מתחלק אף באחד מהם. עריכה של רשימה כזאת אינה משימה קלה. למזלנו, אפשר לצמצם את הרשימה הדרושה במידה ניכרת ולהסתפק במספרים הראשוניים הקטנים מ-50. הסיבה לכך היא שבמספר טבעי שהוא מכפלה של שני גורמים (לאו דווקא ראשוניים), אחד הגורמים הוא גדול מהשורש הריבועי של המספר או שווה לו, והגורם האחר קטן ממנו או שווה לו (אחרת המכפלה הייתה גדולה או קטנה מהמספר). לכן, אם נקבע שהמספר אינו מתחלק בכל אחד מהמספרים הראשוניים עד השורש הריבועי שלו, נשלול את חלוקתו בכל המספרים הראשוניים הקטנים ממנו ונוכיח שהוא ראשוני. בתרגיל זה אנו בוחנים את המספר 2311: $48^2 = 2304 < 2311 < 2401 = 49^2$ ומכאן $\sqrt{2311} < 49 < 50$. לפיכך, כאמור, די לבחון את המספרים הראשוניים עד 50, שהם: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$. כדי לוודא שהמספר 2311 הוא אכן ראשוני, עלינו לבדוק שהוא אינו מתחלק באף אחד מ-15 המספרים האלה. לדוגמה $2311 = 121\cdot 19 + 12 = 62\cdot 37 + 17$. מכאן - 2311 אכן אינו מתחלק ב-19 וב-37. הקוראים יבדקו את החלוקה ב-13 המחלקים הראשוניים הנותרים.

ב : הוכיחו שלכל מספר ממשי x ולכל שני מספרים טבעיים k ו-m מתקיים השוויון:

$$(x^k - 1)(1 + x^k + x^{2k} + \ldots + x^{(m-1)k}) = (x^m - 1)(1 + x^m + x^{2m} + \ldots + x^{(k-1)m})$$

הוכחה: מאחר ש-$(x^k)^m = (x^m)^k = x^{k\times m} = x^{m\times k}$, השוויון המבוקש נובע מהנוסחה

$$(z-1)(1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1}) = z^n - 1$$

באופן זה: בהציבנו $n = m$, $z = x^k$ באגף שמאל של השוויון המבוקש ו-$n = k$, $z = x^m$ באגף ימין שלו, נקבל שכל אחד משני האגפים אינו אלא $x^{k\cdot m} - 1$, ולכן הם שווים.

ג : **1**. הציגו את המספרים שלהלן כמכפלה של גורמיהם הראשוניים: 37, 54, 156, 2,072. בכל אחת מההצגות כתבו את הגורמים הראשוניים בסדר עולה וקבצו גורמים שווים לחזקה מתאימה שלהם.

37 הוא מספר ראשוני (ודאו) ולכן פירוקו הוא 37 עצמו (מכפלה של גורם אחד).

$$156 = 2\cdot 78 = 2\cdot 39 = 2\cdot 3\cdot 13 \qquad 54 = 2\cdot 27 = 2\cdot 3\cdot 9 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 2\cdot 3^3$$

$$2072 = 2\cdot 1036 = 2\cdot 2\cdot 518 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 259 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 7\cdot 37 = 2^3\cdot 7\cdot 37$$

2. מבלי לפרק את 100 לגורמיו הראשוניים, הסבירו מדוע כל גורם ראשוני המופיע בפירוק מופיע בו מספר זוגי של פעמים. הסבירו מדוע בפירוק של המספר 500 לגורמים ראשוניים מופיע הגורם הראשוני 5 מספר אי-זוגי של פעמים.

נכתוב $100 = 10 \cdot 10$. כל גורם ראשוני של ה-10 הראשון הוא גם גורם ראשוני של ה-10 השני, ולכן אם אותו גורם ראשוני מופיע בחזקה k ב-10 הראשון, הוא מופיע גם בחזקה k ב-10 השני, ובסך הכול בחזקת $2k$ (שהוא מספר זוגי) בפירוק של 100 לגורמים ראשוניים. לעומת זאת $500 = 5 \times 100$ ולכן בפירוק של 500 מופיע הגורם 5 פעם אחת יותר מאשר בפירוק של 100. זה עתה ראינו שבפירוק של 100, כל גורם ראשוני מופיע מספר זוגי של פעמים, ולכן גם 5 (בין שהוא מופיע ובין שלא) יופיע מספר זוגי של פעמים. מספר זוגי ועוד 1 הוא מספר אי-זוגי.

3. הוכיחו שאם $n = m^2$, אזי כל גורם ראשוני של n מופיע בפירוק שלו מספר זוגי של פעמים.

חזרו מילה במילה על הטיעון שבתרגיל 2 הנוגע ל-100, תוך כדי החלפת 100 ב-n ו-10 ב-m.

ד: 1. פרקו את המספרים שלהלן למכפלה של גורמיהם הראשוניים: 68, 126, 1452, 3150.

$$68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17 = 2^2 \cdot 17, \quad 126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

$$1452 = 2 \cdot 726 = 2 \cdot 2 \cdot 363 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 121 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2$$

$$3150 = 2 \cdot 1575 = 2 \cdot 3 \cdot 525 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

2. על סמך הפירוק, קבעו אם 126 מחלק את 3150, אם 68 מחלק את 1452 ואם 68 מחלק את 3150.

126 מחלק את 3150 כי כל הגורמים הראשוניים של 126 מצויים בפירוק של 3150. ואכן $3150 = 25 \cdot 126$. 68 אינו מחלק את 1452 כי 17 הוא גורם ראשוני של 68 שאינו מופיע בפירוק של 1452 לגורמים ראשוניים. מאותה סיבה 68 אינו מחלק גם את 3150.

3. מצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של זוגות המספרים בתרגיל 2.

כל גורם ראשוני של כל אחד משני המספרים הוא מחלק משותף שלהם. כמו כן, מכפלה של גורמים ראשוניים המופיעים בשני הפירוקים מחלקת את שני המספרים. מכפלה של כל צירוף אחר של מספרים ראשוניים אינה מחלקת לפחות אחד מהם ולכן אינה יכולה להיות מחלק משותף שלהם. מכאן, המחלק המשותף הגדול ביותר הוא מכפלת כל הגורמים הראשוניים המשותפים לשני המספרים. לפיכך: 126 הוא המחלק המשותף הגדול ביותר של הזוג $(126, 3150)$, $2^2 = 4$ הוא המחלק המשותף של הזוג $(68, 1452)$, ו-2 הוא המחלק המשותף של הזוג $(68, 3150)$.

ה : **1**. מצאו מאה מספרים רציונאליים בין $1/2$ ל- $3/2$.

$0.50 = 50/100 = 1/2$ ואילו $3/2 = 150/100 = 1.50$. 99 מספרים רציונאליים אלה נמצאים ביניהם: $0.51, 0.52, ..., 0.99, 1.00, 1.01, ..., 1.49$. אם נצרף אליהם את המספר 0.995 למשל, נקבל 100 מספרים רציונאליים שכולם בין $1/2$ ל- $3/2$.

2. הוכיחו שאם $r < s$ הם שני מספרים רציונאליים, אזי לכל מספר טבעי n, גדול ככל שיהיה, אפשר למצוא n מספרים רציונאליים שונים זה מזה בין r ל- s.

נסמן ב- d את ההפרש בין s ל- r, כלומר $d = s - r$. n המספרים הרציונאליים הבאים נמצאים בין r ל- s: $r + d/(n+1),\ r + 2d/(n+1),\ ...,\ r + nd/(n+1)$ והם כמובן שונים זה מזה.

ו : **1**. מהי יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר לקטעים שאורכם 1 ס"מ ו-1.5 ס"מ ומדוע?

יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר היא קטע באורך 0.5 ס"מ, כי כפולה שלמה של כל קטע ארוך יותר גדולה מסנטימטר אחד.

2. מצאו יחידת מידה משותפת ל- $2/3$ ול- $4/9$.

$2/3 = 6/9 = 6 \cdot 1/9,\ 4/9 = 4 \cdot 1/9$, ולכן $1/9$ היא מידה משותפת לשני הגדלים הנתונים.

3. מצאו יחידת מידה משותפת נוספת לגדלים בתרגיל 2 ומצאו את יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר שלהם.

מחצית של מידה משותפת היא תמיד מידה משותפת, לכן $1/18$ היא מידה משותפת נוספת במקרה שלפנינו. $4/9 = 2 \cdot 2/9,\ 2/3 = 6/9 = 3 \cdot 2/9$, לכן $2/9$ היא מידה משותפת. מאחר שכל כפולה שלמה של מספר גדול מ- $2/9$ גדולה מ- $4/9$, $2/9$ היא המידה המשותפת הגדולה ביותר.

4. מצאו את יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר ועוד שתי מידות משותפות אחרות ל-10 ול-125 (שימו לב שאנו מזהים אורכי קטעים עם מספרים).

היחידה המשותפת הגדולה ביותר במקרה זה היא 5 כי כל כפולה שלמה של מספר גדול מ-5 גדולה מ-10. מידות משותפות נוספות: 1, 2.5.

5. הוכיחו שכל שני מספרים רציונאליים (קטעים בעלי אורכים רציונאליים) הם בעלי מידה משותפת.

הוכחה: נציג את שני המספרים הרציונאליים כשברים פשוטים ונמצא להם מכנה משותף כלשהו. אם המכנה המשותף שנבחר הוא n, אזי $1/n$ הוא יחידת מידה משותפת לשני המספרים. אם n הוא המכנה המשותף הקטן ביותר, אזי $1/n$ הוא יחידת המידה המשותפת הגדולה ביותר.

ז : נסו להסביר מדוע $0.999...=1$.

ראינו שכל פיתוח עשרוני אין-סופי מייצג מספר ממשי ואמרנו שאם הפיתוח הוא מחזורי הוא מייצג מספר רציונאלי. הפיתוח $0.999...$ הוא אכן מחזורי (הספרה 9 חוזרת על עצמה ללא סוף), והשאלה שנשאלה היא איזה מספר רציונאלי הוא מייצג. אם נאמר שהפיתוח מייצג את המספר 1, כאילו אמרנו ש- $1-0.999...=0$. ערכו של הפיתוח האין-סופי $0.999...$ חייב להיות גדול מכל פיתוח סופי, כלומר $0.999...>0.99...9$. אין כל חשיבות מהו מספר התשיעיות בפיתוח הסופי. אם כן, $1-0.999...<1-0.99...9=0.1^n$ לכל מספר n של תשיעיות בפיתוח הסופי. אבל 0.1^n נעשה קטן מכל מספר חיובי נתון מראש כאשר n גדול דיו, וכפועל יוצא $1-0.999...$ חייב להיות מספר אי שלילי קטן מכל מספר חיובי. 0 (אפס) הוא המספר היחיד המקיים תנאי זה.

הסבר פשוט נוסף: $1=3\cdot 1/3=3\cdot 0.333...=0.999...$

ועוד הסבר: $0.999...=0.9+0.09+0.009+...=9(0.1+0.01+0.001+...)=0.9(1+0.1+0.1^2+...)$

בסכום האין-סופי שבסוגריים הימניים, כל מחובר מתקבל מקודמו באמצעות הכפלה במספר קבוע $q=0.1$ (סדרת מספרים כזאת היא סדרה גיאומטרית). ננסה לחשב את הסכום S_n של n איברים כאלה:

$$S_n=1+q+q^2+...+q^n$$
$$qS_n=q+q^2+q^3...+q^{n+1}$$

ומכאן, נחסר את השוויון השני מהראשון ונקבל:

$$S_n-qS_n=(1-q)S_n=1-q^{n+1}$$

וכשנחלק את שני אגפי שוויון זה ב-$1-q$ (בהנחה ש-$q\neq 1$) נקבל:

$$S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^{n+1}}{1-q}\quad n=1,2,3,...$$

בנוסחה זו נציב $q=0.1$ כדי למצוא את הערך המספרי של הפיתוח $0.999...$:

$$0.99...9=0.9(1+0.1+0.1^2+...0.1^n)=0.9(\frac{1}{1-0.1}-\frac{0.1^{n+1}}{1-0.1})=\frac{0.9}{0.9}(1-0.1^{n+1})=1-0.1^{n+1}$$

בפיתוח הסופי באגף השמאלי יש n פעמים 9.

מכאן: $0.999...>1-0.1^n$ לכל מספר טבעי n. סיום ההסבר בדומה להסבר הראשון.

ח : 1. תנו דוגמה נוספת לקבוצת מספרים רציונאליים שאין בה מספר קטן ביותר.

בקבוצת כל המספרים הרציונאליים שהריבוע שלהם גדול מ-2, כלומר בקבוצת כל המספרים הרציונאליים הגדולים מ- $\sqrt{2}$, אין מספר קטן ביותר. כפי שראינו בפיתוח העשרוני של $\sqrt{2}$, לכל מספר רציונאלי הגדול מ- $\sqrt{2}$ אפשר למצוא מספר רציונאלי קטן ממנו הגדול מ- $\sqrt{2}$.

2. האם בכל קבוצה של מספרים שלמים יש מספר קטן ביותר?

לא. למשל, בקבוצת המספרים השלמים השליליים אין מספר קטן ביותר.

3. האם בכל קבוצה של מספרים שלמים שכולם גדולים מ-(-100) יש מספר קטן ביותר?

כן, כי אם נקרא ל-(-99) בשם 1, ל-(-98) בשם 2 ,..., ל- 0 בשם 100, וכך הלאה במעלה המספרים השלמים החיוביים, הקבוצה הנתונה עם השמות החדשים של איבריה תהיה קבוצה של מספרים טבעיים ולכן יהיה לה מספר קטן ביותר. אם נתרגם מספר טבעי זה לשמו המקורי נקבל כמובן את המספר הקטן ביותר של קבוצת המספרים השלמים הנתונה. הדבר הוא כך כי השמות הוחלפו תוך כדי שמירה על סדר: אם מספר א היה גדול ממספר ב בקבוצה המקורית, הוא גדול ממנו גם בשמותיהם החדשים.

ט : 1. הוכיחו כי $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ הוא מספר אירציונאלי.

אם המספר הנתון רציונאלי, גם ריבועו רציונאלי, כי מכפלה של מספרים רציונאליים היא מספר רציונאלי.

לכן די להוכיח שהריבוע של המספר הוא אירציונאלי.

$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$. אם $r=5+2\sqrt{6}$ רציונאלי, הרי גם $\sqrt{6}=(r-5)/2$ רציונאלי, אבל ידוע לנו (מהמשפט בפרק 3) ש- $\sqrt{6}$ הוא מספר אירציונאלי.

2. תנו דוגמה לשני מספרים אירציונאליים שסכומם רציונאלי ודוגמה אחרת לשני מספרים אירציונאליים שהפרשם רציונאלי.

נגדיר $a=5-\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}$ שני מספרים אירציונאליים שסכומם $a+b=(5-\sqrt{3})+\sqrt{3}=5$ הוא מספר רציונאלי. אם נחליף את a ב- $a'=5+\sqrt{3}$ נקבל $a'-b=(5+\sqrt{3})-\sqrt{3}=5$, כלומר שני מספרים אירציונאליים שהפרשם הוא מספר רציונאלי.

3. האם סכום של מספר רציונאלי ומספר אירציונאלי יכול להיות מספר רציונאלי? האם מכפלה של מספר רציונאלי שונה מ-0 ומספר אירציונאלי יכולה להיות מספר רציונאלי?

התשובה לשתי השאלות היא שלילית. הסכום: אם שוויון כזה מתקיים - נחסיר משני אגפיו את המחובר הרציונאלי ונקבל שוויון בין מספר אירציונאלי למספר רציונאלי - לא ייתכן מצב כזה. המכפלה: כפי שהוסבר בנוגע לסכום, אלא שבמקום להחסיר - נחלק.

חוברות ״כדאי לדעת״ מציגות מגוון נושאים אקדמיים וסוגיות מתקדמות בשפה שווה לכל נפש. מטרתן לחשוף את הקוראים לתחומים חדשים ולאתגר את חשיבתם.

חוברת זו מציגה בקיצור את התפתחות מושג המספר - מהמספרים הטבעיים ועד לתגלית המפתיעה של מספרים אירציונאליים - ומספקת הוכחה לאירציונאליות של שורשים.

תוכנית בנו ארבל לתלמידים צעירים מצטיינים במתמטיקה
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

goodtoknow.tau.ac.il