

יוני 2014

### דוגמאות לשאלות מבחינות בגרות במתמטיקה

1. (חורף, 1980) הוכיחו, בעזרת אינדוקציה מתמטית (או בכל דרך אחרת), כי עבור כל  $n$  טבעי מתקיים:  

$$(0 < a < 1) \quad (1-a)^n \leq \frac{1}{1+na}$$
2. (קיץ, 1975) א.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  הם  $n$  האיברים הראשונים של סדרה הנדסית. הוכיחו כי  $1/a_1, 1/a_2, \dots, 1/a_n$  גם היא סדרה הנדסית. ב. נסמן ב-  $S_n$  את הסכום  $a_1 + \dots + a_n$  (סכום  $n$  האיברים הראשונים) וב-  $S'_n$  את הסכום  $1/a_1 + \dots + 1/a_n$  (סכום  $n$  האיברים הראשונים). הוכיחו כי  $S_n/S'_n = a_1 \cdot a_n$ .
3. (חורף, 1980) הוכיחו כי במשולש מתקיים  $\gamma, \beta, \alpha$  הן זוויות במשולש, ו  $a, b, c$  הצלעות מולן):  

$$\frac{a^2 - b^2}{c^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma)}$$
4. (קיץ, 1996) על ספסל ישר שבו 12 מושבים יש להושיב 12 אנשים – 8 גברים ו-4 נשים. א. בכמה אופנים ניתן להושיב את 12 האנשים כך שלא כל 8 הגברים ישבו זה ליד זה (כלומר, לא כל 8 הגברים ישבו ברצף אחד)?  
 ב. שני גברים, ראובן ושמעון, מעוניינים לשבת זה ליד זה. בכמה אופנים ניתן להושיב את 12 האנשים, כך שראובן ושמעון ישבו זה ליד זה, אך לא כל 8 הגברים ישבו זה לצד זה?
5. (קיץ, 1971) מעגל, שמרכזו על ציר ה- $x$ , נוגע במפנים בפרבולה  $y^2 = 2px$ . המשיקים (המשותפים) למעגל ולפרבולה בנקודות המגע ביניהם והישר המחבר את נקודות מגע אלה יוצרים משולש שווה צלעות. א. הביעו את רדיוס המעגל הנ"ל ואת מרכזו באמצעות  $p$ . ב. מהי משוואת המעגל הנ"ל?
6. (חורף, 1977) א. פתרו את אי-השוויון:  $\log_{0.5}(2^x - 1) > x - 1$ . ב. נתון  $\log_2 14 = a$ . הביעו את  $\log_{49} 32$  באמצעות  $a$ .
7. (קיץ, 1999) נתונה המשוואה:  $(z-a)^3 = -8$ , כאשר  $z$  מספר מרוכב ו- $a$  מספר ממשי. א. בטאו באמצעות  $a$  את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$  (ב. נתון:  $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = -9$ ). מצאו את  $a$ .
8. (חורף, 2000) מצאו עבור אילו ערכים של  $m$  מתקיים לכל ערך של  $x$ :  $|m-3|x^2 - 2mx + m + 2 \geq 0$
9. (קיץ, 1979) בחרוט (קונוס) ישר, שבו זווית הראש של החתך הצירי היא  $\alpha$  והקו היוצר אורכו  $l$ , חסום כדור. הביעו את נפח הכדור באמצעות  $l$  ו- $\alpha$ .
10. (חורף, 1979) נתונות הספרות: 1,2,3,4,5,6,7,8,9. כמה מספרים בעלי חמש ספרות שונות, המכילים את הספרות 2,4,5, אפשר ליצור מהספרות הנתונות הנ"ל?
11. (קיץ, 1987) מכל הפירמידות השונות, הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשבו את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.
12. (חורף, 1997) סדרה מוגדרת על ידי כלל נסיגה:  $a_1 = 6$ , ו-  $a_{n+1} = 3a_n - 8$  עבור  $n \geq 1$ . א. הוכיחו כי הסדרה המוגדרת ע"י הכלל:  $b_n = a_n - 4$  היא סדרה הנדסית. ב. מצאו נוסחא לאבר- $a_n$ . ג. הוכיחו כי הסכום המתחלף של  $2n$  האיברים הראשונים בסדרה:  $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n}$  שווה ל-  $(1-3^{2n})/2$ .