מידות והעתקות שומרות מידה

תזכורת: תהי X קבוצה, $\mathbb{P}(X)$ קבוצת תתי הקבוצות שלה.

- $\mathfrak{B} \subseteq \mathbb{P}(X)$ נקראת **סיגמא אלגברה** אם:
  - $\emptyset \in \mathfrak{B}$,
  - $A, B \in \mathfrak{B}$ גורר $A \cap B \in \mathfrak{B}$,
  - $A \in \mathfrak{B}$ גורר $X \setminus A \in \mathfrak{B}$,
  - $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$ גורר $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{B}$.
- פונקציה $\mu: \mathfrak{B} \to [0, \infty)$ נקראת **מידה (סופית)** אם:
  - $\mu(\emptyset) = 0$,
  - עבור $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{B}$, זרות בזוגות, מתקיים $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
- **מרחב מידה (סופי)** הוא שלישיה $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, כך ש- X קבוצה, $\mathfrak{B}$ סיגמא אלגברה שלה ו- μ היא מידה סופית ($\mu(X) < \infty$). אנו נדבר בעיקר על **מרחבי הסתברות** בהם $\mu(X) = 1$.
- יהי $I \subset \mathbb{N}$. נניח שלכל $i \in I$ נתון מרחב הסתברות $(X_i, \mathfrak{B}_i, \mu_i)$. אזי נוכל להגדיר את **מרחב המכפלה** שלהם, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$:
  - $X = \prod_{i \in I} X_i$,
  - $\mathfrak{B}$ היא ה- σ- אלגברה הנוצרת ע"י קבוצות מהצורה
  $$\prod_{i \in I, i < \min(F)} X_i \times \prod_{i \in F} A_i \times \prod_{i \in I, i > \max(F)} X_i$$
  כאשר $F \subset I$ סופית, $A_i \in \mathfrak{B}_i$,
  - המידה של קבוצות מהצורה הנ"ל היא $\prod_{i \in F} \mu_i(A_i)$. ניתן להרחיב הגדרה זו לכל $\mathfrak{B}$.
- **מידת לבג**, המסומנת ב- λ, מכלילה את אורכי הקטעים ב- $\mathbb{R}$. כלומר, לכל $a \leq b$ ממשיים מתקיים
  $$\lambda(a, b) = \lambda[a, b] = \lambda(a, b] = \lambda[a, b) = b - a .$$
  ה- σ- אלגברה המתאימה לה היא ה- σ - אלגברה הנוצרת מקטעים פתוחים וקבוצות זניחות (ממידה 0). ניתן להכליל הגדרה זו עבור $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.
- **העתקה** $f: X \to \mathbb{R}$ נקראת **מדידה** אם לכל קבוצה פתוחה $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $f^{-1}(A) \in \mathfrak{B}$**.**
- פונקציה $f: X \to \mathbb{R}$ נקראת **פשוטה** אם היא ניתנת להצגה
  $$f(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \chi_{A_j}(x) ,$$
  כאשר c_j קבועים ו- $A_j \in \mathfrak{B}$ קבוצות זרות. עבור פונקציה כזו, נגדיר את ה**אינטגרל** שלה לפי μ על ידי
  $$\int f d\mu = \sum_{j=1}^{m} c_j \mu(A_j) .$$
  באופן דומה ניתן להגדיר לכל פונקציה מדידה את האינטגרל שלה לפי μ.
- העתקה $T: X \to X$ **שומרת מידה** אם לכל $A \in \mathfrak{B}$ מתקיים $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.
- לקבוצה $A \subset \mathbb{N}$ יש צפיפות אם הגבול $d(A) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} |A \cap [1, k]|$ קיים. גבול זה הוא **הצפיפות** של A.

תרגילי חזרה:

1. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה לבג. הראו שהתכונות הבאות מתקיימות:
   a. לכל $v \in \mathbb{R}$ הקבוצה $A + v$ מדידה לבג.
   b. לכל $a > 0$ והעתקה $T(x) = ax$, הקבוצה $T(A)$ מדידה.

2. הראו שקבוצת קנטור היא בעלת מידה אפס. (תזכורת: קבוצת קנטור נבנית בצורה איטרטיבית. מתחילים מהקטע $[0,1]$, בכל שלב מחלקים כל קטע לשלושה חלקים ונפטרים מחלק האמצעי).
3. ניתן לזהות את מידת קנטור כמרחב המכפלה האינסופי $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$, כאשר $X_i = \{0,2\}$, $\mathfrak{B}_i = 2^{X_i}$, ו- $\mu_i(\{X_i = 0\}) = \mu_i(\{X_i = 2\}) = \frac{1}{2}$, ע"י

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

חשבו את
   a. $\int x d\mu$,
   b. $\int x^2 d\mu$.

תרגילים:

1. עבור $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ נגדיר $\mathrm{T_m x = mx \ (mod\ 1)}$.
   a. הראו שלכל $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ ההעתקה $\mathrm{T_m}$ שומרת מידת לבג.
   b. הראו שהמסלול של $\mathrm{T_{10}}x$ מחזורי אמ"מ x רציונלי.
2. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר $\mathrm{R_\alpha x = x + \alpha \ (mod\ 1)}$.
   a. הראו כי אם $\alpha \notin \mathbb{Q}$ אזי כל מסלול הוא אינסופי, ומתקיים $\mathbb{T} = \overline{\{R_\alpha^n x\}}$.
   b. הוכיחו כי מתקיים

$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{\mathrm{n}=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{1}_{(\mathrm{a,b})}(\mathrm{R}_\alpha^{\mathrm{n}} \mathrm{x}) \to (\mathrm{b-a}).$$

3. חשבו את צפיפות הופעות הספרה הראשונה בחזקות של 2. מה לגבי הופעות של בלוקים ראשונים?
4. הראו שבבניה של פורסטנברג $\mu(A) = \bar{d}(S)$.
5. תהא $S \subset \mathbb{Z}$, ונניח ש- $\bar{d}(S) > 0$. הראו שעבור $n_1, \dots, n_k$, אם מתקיים
$\mu(A \cap T^{-n_1}A \cap \dots \cap T^{-n_k}A) > 0$

אזי:

   a. קיים j כך ש- $j, j+n_1, \dots, j+n_k \in S$.
   b. $\bar{d}(S \cap S - n_1 \cap \dots \cap S - n_k) > 0$.