

## טורי פורייה (חזרה)

נביט על הקבוצה  $[1, N] \subset \mathbb{Z}$  ונחשוב על פעולת החיבור:  $\text{mod } N$  כך שהקבוצה תהיה איזומורפית ל-  $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ .

**תרגיל 0:** הוכיחי כי  $G$  היא חבורה אבלית.

נסמן את מרחב הפונקציות מהקבוצה  $G$  למרוכבים  $F = \{f: G \rightarrow \mathbb{C}\}$ , ונגדיר מכפלה פנימית באופן הבא: לכל  $f, g \in F$  נגדיר  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$ .

**שאלה 1:** הראי כי זהו אכן מרחב מכפלה פנימית.

בדומה לטורי פוריה, נרצה למצוא בסיס למרחב הזה. נשתמש ב-

$$e_n(y) = e^{\frac{2\pi i n y}{N}}$$

**שאלה 2:** הראי כי  $\{e_n(y)\}_{n=0}^{N-1}$  היא בסיס אורתונורמלי למרחב המכפלה הפנימית כפי שהוגדר.

נגדיר את מקדמי פוריה:

$$\hat{f}(n) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{y \in G} f(y) \overline{e_n(y)}$$

ואז:

$$f(y) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n) e_n(y)$$

**שאלה 3:** הוכיחי את הזהות האחרונה.

**שאלה 4:** הראי שגם הפונקציות הבאות מהוות בסיס פוריה:

$$\chi_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כיצד ניתן למצוא בסיס פוריה נוספים?