<u>תרגיל 2</u>

שאלה 1

תהי $\bar{x} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ שומרת מידה. הראו שלכל $A \in \mathcal{B}$ אם $\mu(A) > 0$ אז כמעט כל נקודה ב A חוזרת אל A אינסוף פעמים.

שאלה 2

תהי $\bar{x} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ שומרת מידה. הוכיחי שהתנאים הבאים שקולים:

1. $\bar{x}$ ארגודית.
2. לכל f מדידה $f \in L^p$, $f: X \to \mathbb{C}$ אם $Tf = f$ אזי f קבועה כמעט תמיד.
3. לכל $A \in \mathcal{B}$ אם $\mu(A \Delta T^{-1}A) > 0$ אזי $\mu(A) \in \{0,1\}$.
4. אם $\mu(A) > 0$ אז $\mu(\cap_{N=1}^{\infty} \cup_{n=N}^{\infty} T^{-n}A) = 1$.
5. לכל $A, B \in \mathcal{B}$ אם $\mu(A)\mu(B) > 0$ אז קיים n כך ש- $\mu(A \cap T^{-n}B) > 0$.

שאלה 3

תהי $\bar{x} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ שומרת מידה. תהי $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ סמי-אלגברה היוצרת את הסיגמא אלגברה $\mathcal{B}$.

א. הוכיחי שהמערכת היא ארגודית אם כל קבוצה $A \in \mathcal{A}$ מקיימת שאם A אינווריאנטית אז היא טריוויאלית (ז"א $\mu(A) \in \{0,1\}$).
ב. נסחי והוכיחי תוצאה דומה עבור מערבת ומערבת חלש.

שאלה 4

קבעי מתי $R_{\alpha_1} \times \ldots \times R_{\alpha_k} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ ארגודית.

שאלה 5

הזכרי במערכת ברנולי והוכיחי שהיא מערבבת חזק.

שאלה 6

הזכרי בהגדרת H_{tor} מההרצאה והוכיחי כי לכל $f \perp H_{tor}$ ולכל פולינום מתקיים: $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} T^{p(n)} f \xrightarrow{a.e.} 0$.

שאלה 7

1. הוכיחי את המשפט הארגודי הנקודתי שנוסח בהרצאה.
2. הסיקי מהמשפט הארגודי הנקודתי כי כמעט כל $x \in [0,1)$ מקיים כי לכל בסיס b ולכל סדרת מספרים סופית S בבסיס זה: $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(S,x)}{n} = b^{-|S|}$, כאשר $N_n(S,x)$ הוא מספר הפעמים שהרצף S מופיע ב-n ספרות ראשונות של x בבסיס b.
(המקיים זאת נקרא נורמלי.) x