<u>תרגיל 3</u>

שאלה 1

הוכיחי את אי-שיוויון בסל:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |<f,e_n>|^2 \leq \left||f|\right|^2$$

הסיקי את שיוויון פרסבל:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |<f,e_n>|^2 = \left||f|\right|^2$$

שאלה 2

בתרגיל זה נוכיח את משפט *Roth*:

תהי $A \subset [1,N]$ כך ש$|A| \geq \delta N$ כאשר $\delta > \frac{c}{loglogN}$. אזי A מכילה סדרה חשבונית באורך 3 מודולו *N*.

(למעשה, הוכחה דומה תתן את התוצאה ללא המודלו).

1. לקבוצה A נגדיר פונקציה מתאימה: $A(x) = \begin{cases} 1\ if\ x \in A \\ 0\ if\ x \notin A \end{cases}$
   נגדיר $\Lambda(A) = \frac{1}{N^2}\sum_{x,r} A(x)A(x+r)A(x+2r)$. מה המשמעות של הערך $\Lambda(A)N^2$?
2. הוכיחי כי $\Lambda(A) = \sum_s \hat{A}(s)^2\hat{A}(-2s)$.
3. נרצה לחסום את הסכום הנ"ל. תחילה, הראי כי $\hat{A}(0) = \delta$ והשתמשי בנוסחאת פרסיבל כדי להוכיח:
   $$\left|\sum_{s\neq 0} \hat{A}(s)^2\hat{A}(-2s)\right| \leq \delta \max_{s\neq 0} |\hat{A}(s)|$$
4. עתה נטפל בשני מקרים נפרדים, בראשון הניחי כי $\left|\hat{A}(s)\right| \leq \frac{\delta^2}{2}$ לכל $s \neq 0$ והסיקי כי אז בA יש סדרה חשבונית באורך שלוש.
5. עבור המקרה השני נניח את הלמה הבאה:

למה (2.1 מהספר של *Kinneberg*)

תהי $A \subset \mathbb{Z}_N$ כך ש $|A| = \delta N$, ונניח וקיימת $s \in \mathbb{Z}_N$ כך ש $0 \neq$ $\left|\hat{A}(s)\right| > \epsilon$ (כאשר $\epsilon > 0$). אזי קיימת סדרה חשבונית $P = \{a, a+r, \ldots, a+(m-1)r\}$ כאשר $m \sim \epsilon\sqrt{N}$ וכן $|A \cap P| \geq (\delta + \frac{\epsilon}{2})|P|$.

נשתמש בלמה הנ"ל כדי להחליף את $\mathbb{Z}_N$ בP ואת A ב$A \cap P$.

6. מה ההבדל בצפיפות של A ב$\mathbb{Z}_N$ לבין הצפיפות של $A \cap P$ בP? כמה פעמים ניתן לחזור על התהליך הנ"ל?
7. הראי כי בסוף התהליך נמצא סדרה חשבונית מודולו N באורך 3 בA.