הקורס של תמר ציגלר־ הוכחת המשפט הארגודי:

משפט: תהי $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ מערכת שומרת מידה. אז לכל $f\in L^2$ מתקיים ש־

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T^n x\right) \xrightarrow{L^2} \tilde{f}$$

וכן $\tilde{f}$ פונקציה אנווריאנטית.

הוכחה: נסמן את המרחב

$$\mathcal{C}:=\left\{U_T g-g;\ g\in L^2\right\}$$

נשים לב שלכל $f\in\mathcal{C}$ מתקיים ש־

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T^k x\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

תהי $f\in\overline{\mathcal{C}}$, אז אם

$$\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T^k x\right)=\varepsilon>0$$

קיימת $g\in\mathcal{C}$ כך ש־ $\left|\left|f-g\right|\right|_{L^2}<\frac{\varepsilon}{2}$ ו־

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left|\left|\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T^k x\right)\right|\right|_{L^2}\le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ \left|\left|\left(f-g\right)\left(T^k x\right)\right|\right|_{L^2}\\ &+ \left|\left|\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} g\left(T^k x\right)\right|\right|_{L^2}\le \limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\ \left|\left|\left(f-g\right)\right|\right|_{L^2}=\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

וזו כמובן סתירה. נסיק כי לכל $g\in\overline{\mathcal{C}}$ מתקיים שהסכומים הארגודיים שואפים ל־0.
עתה נראה כי $L^2=\overline{\mathcal{C}}\oplus X_{inv}$ כאשר X_{inv} הוא קבוצת הפונקציות ה־ T אנווריאנטיות.
ראשית, $X_{inv}^{\perp}\subset\mathcal{C}$ שכן לכל $f\in X_{inv}$ ולכל $g\in\mathcal{C}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle f,g\rangle &= \langle f,U_T h-h\rangle=\int f\overline{\left(U_T h-h\right)}\,d\mu\\ &= \int f\cdot\overline{U_T h}\,d\mu-\int f\cdot\overline{h}\,d\mu=\int f\cdot\overline{h}\,d\mu-\int f\cdot\overline{h}\,d\mu=0\end{aligned}$$

ומשום שהתכנסות בנורמה גוררת התכנסות במכפלה פנימית הרי שמה שרשום למעלה מתקים לכל $g\in\overline{\mathcal{C}}$.
סך הכל קיבלנו ש־ $X_{inv}\subset\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$. נראה הכלה הפוכה־ תהי $f\in\overline{\mathcal{C}}^{\perp}$ אז לכל $h\in L^2$ מתקיים

$$\begin{aligned}0 &= \langle f,U_T h-h\rangle=\int f\overline{\left(U_T h-h\right)}\,d\mu\\ &= \int f\cdot\overline{U_T h}\,d\mu-\int f\cdot\overline{h}\,d\mu=\int U_T^{-1}f\cdot\overline{h}\,d\mu-\int f\cdot\overline{h}\,d\mu=\left\langle U_T^{-1}f-f,h\right\rangle\end{aligned}$$

בפרט מתקיים $U_T^{-1}f = f$ כאשר השיוויון הוא שיוויון ב־ L^2 ולכן f חייבת להיות T אנווריאנטית.
כדי לסכם את ההוכחה, עלינו לשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(T^k x\right) &= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P_{inv}f\left(T^k x\right) + f - P_{inv}f\left(T^k x\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} P_{inv}f\left(T^k x\right) + \left(f - P_{inv}f\right)\left(T^k x\right) = P_{inv}f(x)
\end{aligned}$$

ואם המרחב שלי הוא ארגודי הרי ש־ X_{inv} הוא הפוקנציות הקבועות, ומתקיים

$$\langle P_{inv}f, 1\rangle = \lim_{N\to\infty}\left\langle U_T^k f, 1\right\rangle = \int f$$

ומשום ש־ $P_{inv}f$ פונקציה קבועה, הרי שהיא שווה לאנטגרל של f.