הקורס של תמר ציגלר- שיעור ראשון:

תהי $S\subset\mathbb{N}$ בעלת צפיפות חיובית, כלומר

$$d(S):=\left|\frac{S\cap[1,k]}{k}\right|\to\delta>0$$

נשאל מה חייב להיות ב- S? נראה שקיימים שני איברים $x,y\in S$ כך ש- $x-y=n^2$.
בקורס, נראה זאת בשתי דרכים- גישה ארגודית וגישה קומבינטורית.
נתחיל מהגישה הארגודית: יהי $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב מידת הסתברות כאשר X הינה קבוצה כלשהי, $\mathcal{B}$ הינה σ אלגברה (כלומר אוסף תתי הקבוצות כך ש- $X,\emptyset\in\mathcal{B}$ והיא סגורה לחיתוכים ואיחודים בני מניה- הקבוצות ב- $\mathcal{B}$ נקראות מדידות) ו- μ הינה מידת הסתברות $\mu:\mathcal{B}\to[0,1]$, כלומר מקיימת $\mu(X)=1,\ \mu(\emptyset)=0$ והינה סיגמא אדיטיבית.

דוגמאות:

1. X כלשהי, $\mathcal{B}=\{X,\emptyset\}$.
2. $X_0=\{0,1\}$ והמידה $\mu(\{0\})=\mu(\{1\})=\frac{1}{2}$ או $\mu(\{0\})=\frac{1}{4},\ \mu(\{1\})=\frac{3}{4}$.
3. $X_0\times X_0\times X_0$, וכן $\mu(0,0,1)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}$.
4. X_0 = כל הסדרות עם איברים מהקבוצה $\{0,1\}$ והמידה הינה מידת המכפלה שמוגדרת על כמו קטעים שהם כאשר קבענו חלק מהקורדינטות, אבל לא את כולן. קבוצות כאלו נקראות קבוצות צילינדר והסיגמא אלגברה הנוצרת על ידן היא $\mathcal{B}$, הוא המרחב בו נעסוק בקורס.
5. $X=[0,1)$, $\mathcal{B}$ הינה הסיגמא אלגברה של בורל, זו שנוצרת על ידי הקטעים הפתוחים, $\mu((a,b))=b-a$.

הגדרה: נאמר ש-$(X,\mathcal{B},\nu,T)$ היא מערכת היא שומרת מידה אם $(X,\mathcal{B},\mu)$ מרחב הסתברות, $T:X\to X$ שהיא מדידה (כלומר לכל $B\in\mathcal{B}$ מתקיים $T^{-1}B\in\mathcal{B}$) וכן T שומרת מידה, כלומר $\mu(T^{-1}B)=\mu(B)$.

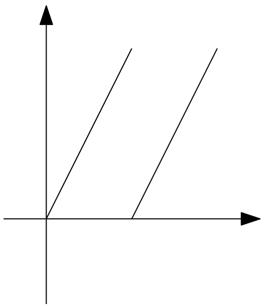
דוגמאות:

1. $X=\{0,1\}=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, עם $\mu(\{0\})=\mu(\{1\})=\frac{1}{2}$, וההעתקה $Tx=x+1$ אז T שומרת מידה, אבל כמו שהגדרנו את המידה קודם (עם רבע ושלושה רבעים), זו אינה מערכת משמרת מידה.
2. $X=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ עם הפעולה $Tx=(x+\alpha)\mod 1$ אז להפעיל את ההעתקה זה למעשה לסובב בזוית α ובפרט היא שומרת על מידת לבג.
3. $X_0=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ עם פעולת ההזזה $(\sigma x)_n=x_{n+1}$ כלומר אנחנו מזיזים את הסדרה מקום אחד. במילים אחרות

$$\sigma(x_0,\ x_1,\ \cdots)=x_1,\ x_2,\ \cdots$$

תרגיל: וודאו שהעתקה זו שומרת את מידת המכפלה שתיארנו קודם לכן.
!!! נשים לב שזה לא משנה איזה משקל אנו נותנים לכל נקודה.

4. $X=[0,1]$ אך הפעם $Tx=2x \mod 1$ אז T נראית כמו בציור, היא אינה הפיכה אבל היא משמרת מידת לבג.



מה שיעניין אותנו זה מה קורה לנקודת טיפוסית, למשל עבור הקבוצה $A=\left[0,\frac{1}{4}\right]$ כמעט כל נקודה ב־ A חוזרת ל־ A אינסוף פעמים (נראה זאת מחר), אבל לא נוכל לומר זאת על כל נקודה. ישנן מערכות שבהן כן אפשר לומר מה קורה לכל נקודה, למשל במערכת $Tx=(x+\alpha) \mod 1$ אם α היא אי רציונלית אז כל נקודה תבקר בכל קבוצה אינסוף פעמים (תראו בתרגיל), למעשה כולן מבקרות בכל קבוצה באותה שכיחות. למעשה יש לנו פה מבנה נוסף, מבנה אלגברי שהוא מכריח אותנו לעשות זאת. במקרה שלנו לא תהיה לנו אנפומציה נוספת על המערכת, ולכן לא נוכל לומר מה קורה לכל נקודה, אלא רק מה קורה לנקודה טיפוסית, באופן פורמלי, מה קורה כמעט תמיד.

עקרון ההתאמה של פירסטנברג: תהי $S\subset\mathbb{Z}$ קבוצה בעלת צפיפות עליונה חיובית, כלומר

$$\overline{d}(S):=\limsup_{M_m-N_m\to\infty}\frac{S\cap[N_m,M_m]}{M_m-N_m}=\delta>0$$

(לפעמים צפיפות זו נקראית צפיפות בנך) אזי יש מערכת שומרת מידה $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ וקבוצה $A\in\mathcal{B}$ בעלת מידה חיובית כך שאם־

$$\mu\left(A\cap T^{-n^2}A\right)>0$$

אז $S\cap(S-n^2)\neq\emptyset$, כלומר יש $x\in S$ כך ש־ $x-n^2\in S$.
נזכיר כי־ $S-n^2:=\{s-n^2;\ s\in S\}$.
זה יאפשר לנו לקחת את השאלה שעסקה בסדרות לשאלה בהקשר של מערכת שומרת מידה, ואולי איזשהו משפט שם, טענה לגבי מערכות שומרות מידה, תיתן לנו את המשפט הזה ל־ S.
עקרון זה הוא יותר כללי, כלומר לכל סדרה סופית של מספרים טבעיים $n_1,n_2,\cdots,n_k$ מתקיים שאם

$$\mu\left(A\cap T^{-n_1}A\cap\cdots\cap T^{-n_k}A\right)>0$$

אז קיימת נקודה $x\in S$ כך ש־ $x,x-n_1,x-n_2,\cdots,x-n_k\in S$.
איך בונים זאת? ניקח $X=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ (שרשראות אינסופיות של אפסים ואחדות) ו־ $\mathcal{B}$ הסיגמא אלגברה שנוצרת על ידי צילינדרים. החלקים הקריטיים הם מיהי הקבוצה ואיזו מידה אנחנו מגדירים. נגדיר את הקבוצה A להיות כל הנקודות כך ש־ $x_0=1$, כלומר כל הסדרות שבקורדינטה 0 רשום 1. נסמן נקודה מיוחדת x^S את הנקודה שמאופיינת על ידי

$$x_n^S=\begin{cases}1 & ,n\in S\\ 0 & ,n\notin S\end{cases}$$

אז מתקיים $x^S\in A$ אם ורק אם $0\in S$. הפעולה היא פעולת ההזזה, נסמנה T. מה זה אומר ש־ $T^nx\in A$, שקורדינטת n שלה היא 1 כלומר אם $T^nx^S\in A$ אז $n\in S$ (וזה אם ורק אם).

נותר לבנות את המידה־ נזכור כי עבור נקודה $x \in X$ נוכל להגדיר מידת דלתא באופן הבא, עבור קבוצה $E \in \mathcal{B}$ נגדיר

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & ,x \in E \\ 0 & ,x \notin E \end{cases}$$

נבנה סדרה של מידות־ תהי $[N_m, M_m]$ סדרה של קטעים כך ש־

$$\overline{d}(S) := \lim_{M_m - N_m \to \infty} \frac{S \cap [N_m, M_m]}{M_m - N_m} = \delta > 0$$

ונסמן

$$\mu_m(E) = \frac{1}{M_m - N_m} \sum_{j \in [N_m, M_m]} \delta_{T^j S}(E) = \frac{1}{M_m - N_m} \# \left\{ T^j x^S \in E \right\}$$

במילים אחרות $\mu_m(E)$ הינה מספר הפעמים (מנורמל) ש־ $T^j x^S$ מבקר ב־ E. נשים לב ש־ μ_m הן מידות הסתברות על $(X, \mathcal{B})$. נשתמש במשפט הבא:

משפט: אם X הוא מרחב קומפקטי מטרי, ו־ $\mathcal{B}$ הסיגמא אלגברה של בורל עליו, אז אוסף מידות ההסתברות של $(X, \mathcal{B})$ הוא קומפקטי בטופולוגיה החלשה, כלומר לכל $\{\mu_n\}$ סדרה של מידות הסתברות יש תת סדרה $\{\mu_{n_k}\}$ ויש מידה גבולית μ, מידת הסתברות, כך שלכל $f \in C(X)$, כלומר פונקציה רציפה, מתקיים $\int f d\mu_{n_k} \to \int f d\mu$. [זוהי מסקנה של משפט בנך אלאוגלו].
נשים לב שהמידות בסדרה אינן אנווריאנטיות להזזה, אבל המידה הגבולית כן.

הסדרה שבנינו היא סדרה של מידות הסתברות, ולכן יש לה תת סדרה מתכנסת במובן החלש למידה שנסמנה μ. יש לוודא את הדברים הבאים:

1. $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ הינה מערכת שומרת מידה, כלומר $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$ לכל $B \in \mathcal{B}$.
2. $\mu(A) > 0$.
3. אם $\mu\left(A \cap T^{-n^2} A\right) > 0$ אז $S \cap (S - n^2) \neq \emptyset$.

המידה בדיוק מודדת את השכיחות של הביקורים של הנקודה המיוחדת x^S. לבדוק את הדברים הנל הם בדיקות טכניות לפי ההגדרות (שתעשה בתרגיל). רק הערה קטנה לגבי הבדיקה של 3, משתמשים בעובדה שכל מה שמשנה זה קבוצות צילינדר והם סגוחות (סגורות וגם פתוחות) ולכן הפונקציה המציינת היא רציפה.