הקורס של תמר ציגלר־ שיעור שני:

תזכורת: תהי $S\subset\mathbb{N}$ בעלת צפיפות (עליונה) חיובית, ואני שואלים מה חייב להיות ב־ S? מה שהוביל לשאלה הזו הוא משפט סמרדי, שאומר ש־ S כזו מכילה סדרות חשבוניות מכל אורך סופי. זהו משפט מטיפוס רמזי, כלומר עבור קבוצה עם מבנה כלשהו ושואלים האם תת קבוצה גדולה משמרת את המבנה. הדרך שלנו לחשוב על S היא כמו להסתכל עליה כתת קבוצה של $\mathbb{N}$ עם מבנה טוב, כלומר עם צפיפות עליונה חיובית, ואנו שואלים האם היא עדיין מכילה סדרות מכל אורך. משפטים שדנים בשימור מבנה של תת קבוצה, הם קשים להוכחה, והדוגמא הזו שאנו מתעסקים בה היא הכי קלה מכל הבעיות מהסוג הזה.

משפט: [פורסטנברג־סרקוזי] קבוצה S בעלת צפיפות עליונה חיובית, מכילה $x,y\in S$ כך ש־ $x-y=n^2$ עבור $n>0$.

אתמול התחלנו לדבר על עקרון ההתאמה של פירסטנברג, שאומר שאם $S\subset\mathbb{Z}$ בעלת צפיפות חיובית, אז יש מערכת $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ שומרת מידה, וקבוצה מיוחדת $A\in\mathcal{B}$ כך ש־ $\mu(A)>0$ וגם אם $\mu\left(A\cap T^{-n^2}A\right)>0$ אז $S\cap(S-n^2)\neq\emptyset$.

הערה: אפשר לקבל הרבה מידות כאלו, למשל אם נגריל קבוצה S (למשל על ידי הטלות מטבע) אז באופן טיפוסי המידה המתקבלת היא מידת המכפלה. מצד שני, אם נבחר $S=2\mathbb{N}$ אז המערכת המתקבלת היא רק שתי נקודות $(X,\mu)\cong\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ עם הפעולה של להוסיף 1. הנקודה היא שאין לנו אנפורמציה על המידה שקיבלנו מהקבוצה שלנו.

משפט: אם $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ מערכת שומרת מידה וגם $\mu(A)>0$ אז קיים $n\geq 1$ כך ש־ $\mu\left(A\cap T^{-n^2}A\right)>0$.

נשים לב שאם נוכיח את המשפט הזה אז זה יסיים לנו את ההוכחה. מדוע יש לצפות שמשפט שכזה יהיה נכון?

משפט: $[Poincar\acute{e}]$ אם $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ מערכת שומרת מידה וגם $\mu(A)>0$ אז קיים $n\geq 1$ כך ש־ $\mu\left(A\cap T^{-n}A\right)>0$.

במערכת שאינה משמרת מידה זה לא בהכרח קורה. המערכת שבגללה $Poincar\acute{e}$ שאל את השאלה היא מערכת המילטוניאנית־ נניח שיש לנו n חלקיקים ואנחנו מסתכלים על האבולוציה של המערכת הזו בזמן. אפשר לזהות את המערכת הזו עם $\mathbb{R}^{2n}$ (שתי קורדינטות למיקום של כל חלקיק) ומשפט ליוביל אומר שמידת לבג על $\mathbb{R}^{2n}$ נשמרת תחת הזזה בזמן.

הוכחה: נתבונן בקבוצות $A,T^{-1}A,T^{-2}A,\cdots$ לכולן אותה מידה, כי המערכת שומרת מידה וכן $\mu(X)=1$. אם כולן זרות אז

$$\mu\left(X\right)\geq\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty}T^{-n}A\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu\left(T^{-n}A\right)=\sum_{j=0}^{\infty}\mu\left(A\right)=\infty$$

לכן קיימים $i\neq j$ כך ש־ $\mu\left(T^{-i}A\cap T^{-j}A\right)>0$ ולכן $\mu\left(T^{-(i-j)}A\cap A\right)>0$ (במקרה ש־ $i>j$).
למעשה נראה היום בתרגיל שמתקיים:

$$\mu\left(A\setminus\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n=N}^{\infty}T^{-n}A\right)=0$$

משמע כמעט כל הנקודות ב־ A מבקרות ב־ A אינסוף פעמים.

הערה: $(X,\mathcal{B},\mu)$ שומרת מידה אם ורק אם $\int f(x)d\mu=\int f\left(Tx\right)d\mu$ לכל f מדידה ואנטגרבילית.
הגדרה: תהי $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ משמרת מידה. נאמר שהמערכת היא ארגודית אם לכל קבוצה מדידה $A\in\mathcal{B}$, אם $T^{-1}A=A$ אז $\mu(A)\in\{0,1\}$. מבחינת משמעות מה שזה אומר זה שנקודה טיפוסית מבקרת בכל מקום במרחב.
הגדרות שקולות:

1. אם f היא פונקציה חסומה (למעשה $f\in L^p, p\geq 1$) אז $Tf=f$ גורר ש־ f קבועה כמעט תמיד. במילים אחרות־ אין לנו פונקציה אינווריאנטיות לא טריוויאליות.
2. לכל קבוצה $A\in\mathcal{B}$ אם $\mu(A)>0$ אז $\mu\left(\bigcap\limits_{N\geq 1}\bigcup_{n=N}^{\infty}T^{-n}A\right)=1$. במילים אחרות, כמעט כל נקודה במרחב (ולא רק בקבוצה A) מבקרת אינסוף פעמים ב־ A.
3. לכל $A,B\in\mathcal{B}$ כך ש־ $\mu(A)\cdot\mu(B)>0$ יש $n>0$ כך ש־ $\mu\left(A\cap T^{-n}B\right)>0$.

בתרגיל תוכחנה את השקילויות הללו ועוד...
דוגמאות:

1. הקבוצה $X=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ עם הפעולה $+1$ עם המידה היחידה שמשמרת את הפעולה (שנותנת משקל זהה לכל הנקודות). זו מערכת ארגודית.
2. הקבוצה $X=\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ עם הפעולה $+2$ עם המידה היחידה שמשמרת את הפעולה (שנותנת משקל זהה לכל הנקודות). זו מערכת שאינה ארגודית, יש לה שני רכיבים אנווריאנטים.
3. הקבוצה $X=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ עם הפעולה $+\alpha \mod 1$ עם מידת אורך שמשמרת את הפעולה וזה ארגודי אם ורק אם $\alpha\notin\mathbb{Q}$. אם $\alpha\in\mathbb{Q}$ אז קל לבנות קבוצה אנווריאנטית לא טריויאלית. נוכיח שאם $\alpha\notin\mathbb{Q}$ אז המערכת היא ארגודית. נשתמש באנליזת פוריה על $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: נזכור כי כל פונקציה f על $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ניתנת להצגה יחידה (ביחס ל־ L^2) באופן הבא $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi inx}$ ולכן

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi inx}=f(x)=f(Tx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_ne^{2\pi in(x+\alpha)}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot e^{2\pi in\alpha}e^{2\pi inx}$$

אבל משום שההצגה היא יחידה, אז $a_n\cdot e^{2\pi in\alpha}=a_n$ וזה אפשרי רק אם $\alpha\in\mathbb{Q}$ או שרק $a_0\neq 0$, כלומר f קבועה.
*כל השיוויונות שלעיל הם שיוויונות ב־ L^2.

4. הקבוצה $X=\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ עם מידת המכפלה המבוססת על המידה μ_0 שהיא המידה המאוזנת. נסמן ב־ σ את פעולת ההזזה, אז המערכת הזו היא ארגודית (יותר מזה, היא מערבבת).

תהי $(X,\mathcal{B},\mu,T)$ מערכת שומרת מידה, נוכל להסתכל על הקבוצה $L^2(X,\mu)$ שזה אוסף הפונקציות המקיימות ש־ $\int|f|^2d\nu<\infty$. מרחב זה הינו מרחב הילברט, הוא מרחב מכפלה פנימית שלם עם המכפלה הפנימית

$$\langle f,g\rangle=\int f\bar{g}d\mu$$

עתה נוכל להגדיר נורמה, מטריקה ולדבר על התכנסות בנורמה. לומר שהוא שלם, זה בעצם לציין שלכל סדרה במרחב שמתכנסת (בנורמה) הגבול גם כן נמצא במרחב. סך הכל זהו מרחב מטרי שלם.

עתה, $T:X\to X$ משרה העתקה $U_T:L^2(X,\mu)\to L^2(X,\mu)$ על ידי $U_Tf=f(Tx)$ (לעיתים נכתוב $U_Tf=Tf$). קל לראות שהעתקה זו היא איזומטריה שכן T משמרת מידה ולכן־

$$\langle U_Tf,U_Tg\rangle=\int U_TfU_T\bar{g}d\mu=\int f(Tx)\bar{g}(Tx)d\mu=\int f(x)\bar{g}(x)d\mu=\langle f,g\rangle$$

כמו כן, אם T היא הפיכה, אז U_T הוא העתקה אוניטרית, כלומר $U_T^*=U_T^{-1}$. מעתה נניח ש־ T הפיכה, אם לא מניחים זאת, רק מסבך טיפה את ההוכחות, אבל התוצאות הן תקפות באותה מידה.

המשפט הארגודי ב־ L^2: נסמן ב־ $X_{inv}:=\{f;\ Tf=f\}=\{f;\ U_Tf=f\}$ (נשים לב שאם המערכת היא ארגודית אלו הן רק הפונקציות הקבועות). זהו תת מרחב של $L^2(X)$ והוא סגור ב־ $L^2(X)$, כי U_T אופרטור רציף. נסמן ב־ P_{inv} את ההטלה על X_{inv}. אזי לכל $f\in L^2(X)$ הממוצעים הארגודיים המוגדרים על ידי

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}U_T^kf$$

מתכנסים ב־ L^2 להיטל $P_{inv}f$.
אם המערכת היא ארגודית, אז

$$P_{inv}f=\langle f,1\rangle=\int fd\mu=\mathbb{E}(f)$$

במילים אחרות, אם המערכת היא ארגודית, אז הממוצע בזמן מתכנס לממוצע במרחב.
את ההוכחה נראה בתרגול, אבל רק רמז־ מתבוננים במרחב $\{U_Tg-g\}$ אז מרחב זה הוא שווה בדיוק ל־ $X_{inv}^{\perp}$ ולכן כל פונקציה מתפרקת להיטל ועוד איבר מהמרחב הזה שתורם משהו ששואף ל־0 בסכומים הארגודיים (עד כדי טעות קטנה).

נסמן ב־

$$X_{tor}:=\overline{\{f;\ \exists m,T^mf=f\}}$$

tor בא מהמילה $torsion$. למשל עבור $X=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ עם הפעולה $+1$ אז היא ארגודית ואין דברים אנווריאנטים, אבל ל־ $+2$ יש, ולכן קבוצה זו אינה ריקה.

טענה: אם $f\perp X_{tor}$ אז $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=0}^{N-1}U_T^{n^2}f\to 0$.

הטריק של ואן דר קורפוט: יהיו $u_1,u_2,\cdots$ אוסף של וקטורים במרחב הילברט $\mathcal{H}$ כך שלכל n מתקיים $||u_n||\le 1$. נסמן

$$\gamma_h=\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^{N}\langle u_k,u_{k+h}\rangle\right|$$

אז אם $\frac{1}{H}\sum\limits_{h=1}^{H}\gamma_h\to 0$ אז $\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}u_n\to 0$.
שתי מילים על ההוכחה: ההוכחה היא הוכחה של חדוא 1, משחקים עם אפסילונים ונשאיר אותה כתרגיל לקוראת המתמידה.

נשתמש בלמה כדי הוכיח את המשפט שלנו־ עם $u_n = U_T^{n^2} f$ ונפעיל את המשפט. נחשב את γ_h:

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int U_T^{n^2} f U_T^{(n+h)^2} \bar{f} d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int f(T^{n^2}x)\bar{f}(T^{(n+h)^2}x)\bar{f} d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int f(T^{n^2}x)\bar{f}(T^{n^2+2nh+h^2}x)\bar{f} d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int f(x)\bar{f}(T^{2nh+h^2}x)\bar{f} d\mu \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \int f(x) U_{T^{2h}}^{n}\left(U_{T^{h^2}} f\right) d\mu \to \int f P_{T^{2h}-inv}\left(U_{T^{h^2}} f\right) d\mu
\end{aligned}$$

כאשר השאיפה האחרונה נובעת מהעובדה שהתכנסות בנורמה גוררת התכנסות חלשה. ואולם, משום ש־ $f \perp X_{tor}$ נקבל ש־ $\gamma_h = 0$ ולכן $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} T^{n^2} f \to 0$.