הקורס של תמר ציגלר־ שיעור שלישי:

תזכורת: בהנתן קבוצה $S \subset \mathbb{Z}$ עם צפיפות עליונה חיובית. היא האם $S - S$ מכילה ריבוע. תרגמנו את השאלה הזו לשאלה הבאה: בהנתן מערכת $(X, \mathbb{B}, \mu, T)$ מערכת משמרת מידה, וקבוצה עם מידה חיובית A האם קיים $n > 0$ כך ש־ $\mu\left(A \cap T^{-n^2}A\right) > 0$.
אתמול הגדרנו את הקבוצה
$$X_{tor} := \overline{\{f;\ \exists n > 0\ s.t\ T^n f = f\}}$$
זהו מרחב מכפלה פנימית, תת מרחב של L^2, אך בלי הסגור הוא אינו סגור, ולכן נגדיר את X_{tor} כמו שהגדרנו למעלה.
הראנו אתמול שאם $h \perp X_{tor}$ אז $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} U_T^{n^2} h \to 0$ ב־ L^2.
מסקנה: ניקח את הפונקציה $f = \mathbf{1}_A$ אז נשים לב שמתקיים

$$\mu\left(A \cap T^{-n^2}A\right) = \int \mathbf{1}_A U_T^{n^2} \mathbf{1}_A d\mu = \left\langle f, U_T^{n^2} f\right\rangle$$

נפרק את f להיטל שלה על המרחב X_{tor} ועוד היתר, $f = P_{tor} f + h = \tilde{f} + h$ אז

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu\left(A \cap T^{-n^2}A\right) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\langle f, U_T^{n^2} f\right\rangle = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\langle \tilde{f} + h, U_T^{n^2}\left(\tilde{f} + h\right)\right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\langle \tilde{f}, U_T^{n^2}\tilde{f}\right\rangle + \left\langle h, U_T^{n^2}\tilde{f}\right\rangle + \left\langle \tilde{f}, U_T^{n^2} h\right\rangle + \left\langle h, U_T^{n^2} h\right\rangle \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \left\langle \tilde{f}, U_T^{n^2}\tilde{f}\right\rangle
\end{aligned}$$

שכן X_{tor} אינווריאנטית ל־ U_T ולכן לכל n מתקיים $\left\langle h, U_T^{n^2}\tilde{f}\right\rangle = 0$ וכן התכנסות בנורמה גוררת התכנסות חלשה. אם נראה שהגבול הנל קיים וחיובי אז סיימנו. למה שהגבול יהיה קיים? כי נקרב את $\tilde{f}$ על ידי פונקציה מחזורית g_m, כך ש־ $T^m g_m = g_m$ וגם $\left\|\tilde{f} - g_m\right\|_{L^2} < \varepsilon$ ועבור g_m זהו סכום כמעט סופי במובן שבגבול נקבל־

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \langle g_m, T^m g_m\rangle \sim \frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1} \left\langle g_m, U_T^{\ell^2} g_m\right\rangle = C(g)$$

כאשר $C(g)$ הוא מספר קבוע כלשהו.
מסקנה: ניתן להחליף את הפונקציה $\mathbf{1}_A$ בפונקציה $\tilde{f} = P_{tor}\mathbf{1}_A$. נשתמש בשתי העובדות הבאות על הטלות:

1. הטלה היא אופרטור חיובי, כלומר לכל $f \geq 0$ תמיד נקבל $P_{tor} f \geq 0$.
2. $\int f = \int P_{tor} f$.הטענה הנכונה באופן כללי היא: תהי $U \subset L^2(X)$ תת מרחב שנוצר כל ידי $\langle \mathcal{A} \rangle$ ו־ $\mathcal{A}$ היא אלגברה של פונקציות חסומות שמכילה את הפונקציות הקבועות, ובפרט היא מכילה את המינימום והמקסימום של כל שתי פונקציות באלגברה מה שנכון בסיטואציה שלנו.

המצב שלנו הוא כזה: יש לנו פונקציה $\tilde{f} \in X_{tor}$ כך ש־ $\tilde{f} \geq 0$ וגם $\int \tilde{f} = \mu(A)$. תהי $g \in X_{tor}$ כך ש־ $\left|\left|\tilde{f} - g\right|\right|_{L^2} < \frac{\mu(A)^2}{8}$ אז קיים m כך ש־ $T^m g = g$. אז־

$$\begin{aligned} \left\langle g, T^{(nm)^2} g \right\rangle &= \langle g, g \rangle = \int |g|^2 \geq \left(\int g \right)^2 \\ &= \left(\int g - \tilde{f} + \tilde{f} \right)^2 \geq \left(\int \tilde{f} \right)^2 - \frac{3\mu(A)^2}{8} = \frac{5\mu(A)^2}{8} \end{aligned}$$

כאשר ניתן להניח כי g ממשית משום ש־ $\tilde{f}$ ממשית (מתכונה ראשונה על הטלה) ואם פונקציה מרוכבת מקרבת פונקציה ממשית, הרי שהחלק הממשי שלה רק יעשה עבודה טובה יותר. נאריך את הסכומים

$$\left\langle \tilde{f}, U_T^{(nm)^2} \tilde{f} \right\rangle = \left\langle g, U_T^{(mn)^2} g \right\rangle + \left\langle g, U_T^{(mn)^2} \tilde{f} - U_T^{(mn)^2} g \right\rangle + \left\langle f - g, U_T^{(mn)^2} \tilde{f} \right\rangle$$

כמו כן מתקיים

$$\left\langle g, U_T^{(mn)^2} \tilde{f} - U_T^{(mn)^2} g \right\rangle = \left\langle g, U_T^{(mn)^2} (\tilde{f} - g) \right\rangle \leq ||g||_{L^2} \left|\left|\tilde{f} - g\right|\right|_{L^2}$$

ולכן זה קטן כרצוננו וסך הכל

$$\left\langle \tilde{f}, U_T^{(nm)^2} \tilde{f} \right\rangle = \cdots \geq \frac{5\mu(A)^2}{8} - 2 \left|\left|\tilde{f} - g\right|\right|_{L^2} > \frac{1}{2}\mu(A)^2$$

סך הכל קיבלנו ש־ $\left\langle \tilde{f}, U_T^{(nm)^2} \tilde{f} \right\rangle \geq \frac{\mu(A)^2}{100}$ וזה מסיים את ההוכחה, שכן משום שכל מחובר הוא אי שלילי כי $\tilde{f}$ היא אי שלילית, ולכן נוכל לסכום על כל האיברים שקונגרואנטיים ל־ m

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left\langle \tilde{f}, U_T^{n^2} \tilde{f} \right\rangle \geq \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \equiv 0(m)} \left\langle \tilde{f}, U_T^{n^2} \tilde{f} \right\rangle \geq \frac{\mu(A)^2}{100 \cdot m}$$

הגדרה: מערכת דינמית $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ נקראת ארגודית טוטאלית $totally\ ergodic$ אם לכל פונקציה f כך ש־ $T^m f = f$ עבור איזשהו $m \geq 1$, f קבועה כמעט תמיד. במקרה זה X_{tor} זה הפונקציות הקבועות.

נתבונן באופן כללי בסכומים, משום שההיטל של האנדיקטור $\mathbf{1}_B$ הוא המידה של הקבוצה B,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu \left(A \cap T^{-n^2} B \right) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n} \left\langle \mathbf{1}_A, T^{n^2} \mathbf{1}_B \right\rangle = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

נזכור ש־ אם $\mu \left(A \cap T^{-n^2} B \right) = \mu(A)\mu(B)$ אז הקבוצות הן בלתי תלויות, ולכן אם בגבול זה מתקיים, אז יש לנו תלות מאוד חלשה. אם זה לא מתקיים, אז יש פונקציה לא קבועה, f כך ש־ $T^m f = f$ עבור איזשהו $m \geq 1$. נניח שהמערכת היא ארגודית (כלומר $m \geq 2$) ונניח לרגע ש־ $m = 2$ כלומר T^2 אינה ארגודית, ויש לה קבוצה A לא טריויאלית כך ש־ $T^2 A = A$. נתבונן ב־ A, TA, מה נוכל לומר על החיתוך

$$T \left(A \cap TA \right) = A \cap TA$$

ולכן החיתוך הזה חייב להיות כלום (עד כדי מידה 0) כי הנחנו שהמערכת המקורית ארגודית, ולכן $\mu(A \cap TA) = 0$ וכן $A \cup TA = X$. נניח רגע ש־ $A \cap TA = \emptyset$ ונתבונן בהעתקה $\mathbf{1}_A$ כהעתקה מ־ X

ל־ $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0,1\}$ והפעולה עוברת לפעולה $+1$ (כלומר 0 עובר ל־1 ו1 עובר ל־0) והמידה המאוזנת בין שתיהן. קיבלנו מורפיזם של מערכות שומרות מידה (שזה מה שקיבלנו־ העתקה ששומרת על התכונות של ההעתקה, והדיאגרמה היא קומוטטיבית) והמערכת החדשה, $\{0,1\}$, היא מערכת מאוד אלגברית.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "S"'] & Y \end{tikzcd}$$

וסך הכל אם T^m אינה ארגודית אזי יש הומומורפיזם כמו שתיארנו למרחב $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ עם הפעולה $+1 \mod m$.

ביום חמישי נראה אילו עוד שאלות אפשר לפתור עם הרעיונות הללו.

הגישה הקומבינטורית:

נסמן $[N] = \{1,2,\cdots,n\}$ ותהי $S \subset [N]$ כך ש־ $|S| = \delta N$ (נניח בלי הגבלת הכלליות ש־ δN שלם, כי תמיד אפשר לזרוק איברים מהקבוצה S). נרצה להראות שאם N מספיק גדול, אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n^2 \in S - S$.

נזהה את הקטע $[N]$ עם $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ונסמן ב־ f את הפונקציה $f = \mathbf{1}_S - \delta$, נשים לב שהתוחלת שלה היא־

$$\frac{1}{N}\sum_{x\in[N]} f(x) = \mathop{\mathbb{E}}_{x\in[N]} f(x) = 0$$

מה שיעניין אותנו הוא $\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(\mathbf{1}_S(x)\mathbf{1}_S(x+d^2)\right)$. אמנם נמצא המון הפרשים ריבועיים לא חוקיים בגלל המודולו N, אבל הם מעטים ולכן בפרט נוכל למצוא איבר כמו שנרצה. בהמשך נסביר למה זה בסדר, אך כעת רק נתאר את השיטה. אז

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(\mathbf{1}_S(x)\mathbf{1}_S(x+d^2)\right) &= \mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(\left(\mathbf{1}_S-\delta+\delta\right)(x)\left(\mathbf{1}_S-\delta+\delta\right)(x+d^2)\right) \\ &= \mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(f(x)f(x+d^2)\right) + \delta^2 \end{aligned}$$

אם מתקיים ש־ $\left|\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(f(x)f(x+d^2)\right)\right| < \frac{\delta^2}{2}$ אז ניצחנו כי אז התוחלת היא חיובית, ולכן בפרט הרבה מהסכומים הם חיוביים. **הערה:** עבור קבוצה טיפוסית S (כזו המתקבלת על ידי הגרלה עם מטבע מוטה δ) נצפה שההתוחלת תהא δ^2 בערך.

טענה: אם $\left|\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x\le N\\ d\le\sqrt{N}}} \left(f(x)f(x+d^2)\right)\right| \ge \frac{\delta^2}{2}$ אזי יש סדרה חשבונית $p \subset [N]$ מהצורה־ $p = \{a+\ell q^2;\ |\ell| \le |p|\}$ שאורכה גדול מ־ $|p| \ge c(\delta)N$ כלומר כך ש־ $\frac{|S\cap p|}{|p|} \ge \delta + d(\delta)$, ו־$d$ פונקציה לא יורדת.

איך נשתמש בזה כדי לסיים? נתאים בין p לבין $p' = [c(\delta)N]$ ובין S ל־ S' ונמשיך כך באנדוקציה לייצר סדרה של סדרות p וסדרה של קבוצות עד שהצפיפות תהא גדולה שווה 1 וכן החיתוך של כל p ושל S יהיה כל S, אבל p סדרה חשבונית ולכן A סדרה חשבונית עם הפרשים ריבועיים בפרט קיימים שני איברים כרצוננו.