הקורס של תמר ציגלר־ שיעור רביעי:

תזכורת: אנחנו מנסים להראות באמצעות הגישה הקומביטורית, שבהנתן $S \subset [N]$ גדולה אזי יש ב־ S הפרש שהוא ריבוע של מספר שלם.

אנחנו מניחים ש־ $S \subset [N]$ כך ש־ $|S| = \delta N$ ומזהים את איברי $[N]$ עם $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. הערכנו את מספר הריבועים ב־ S (כולל ריבועים שלא יהיו חוקיים בגלל המודולו N) על ידי

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x \le N \\ d \le \sqrt{N}}} \left(\mathbf{1}_S(x)\mathbf{1}_S(x+d^2)\right) \cdot N\sqrt{N}$$

נראה שזה נורא גדול ומשום שמספר ההפרשים הלא חוקיים הוא קטן אז ניצחנו בכל מקרה. איך נתמודד עם הביטוי הזה, נתבונן בפונקציה

$$f(x) = \mathbf{1}_S - \delta$$

אז הממוצע של f הוא 0 (פונקציה זו נקראת לפעמים הפונקציה המאוזנת) וכן חישוב שעשינו בשיעור שעבר הראה ש־

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\substack{x \le N \\ d \le \sqrt{N}}} \left(\mathbf{1}_S(x)\mathbf{1}_S(x+d^2)\right) = \delta^2 + \mathbb{E}\left(f(x)f(x+d^2)\right)$$

ושמנו לב ש־ δ^2 היתה התוצאה של התוחלת במקרה של קבוצה טיפוסית (תרגיל להראות) אבל אנחנו רוצים להראות את זה לכל קבוצה.

טענה: אם השגיאה $\left|\mathbb{E}\left(f(x)f(x+d^2)\right)\right| \ge \frac{\delta^2}{2}$ אז יש תת סדרה חשבונית $p \subset \mathbb{N}$ מהצורה־ $p = \{a + \ell q^2;\ \ell \le |p|\}$ כך ש־ $|p| \ge c(\delta) \cdot N$, $|S \cap p| \ge (\delta + d(\delta))\,|p|$ וכן $d(\delta)$ היא פונקציה לא יורדת.

נשים לב ש־ q חסום על ידי ביטוי שתלוי ב־ $c(\delta)$.

מדוע זה גורר את המשפט? אם $\left|\mathbb{E}\left(f(x)f(x+d^2)\right)\right| < \frac{\delta^2}{2}$ אז ניצחנו. אחרת יש p כבטענה. נתאים ל־ p את הקטע $[N_1]$ כך ש־ $|N_1| = |p|$ ונתאים ל־ $S \cap p$ קבוצה $S_1 \subset [N_1]$ כך ש־ $|S_1| \ge N_1 \cdot (d(\delta) + \delta)$ על ידי ההתאמה $\ell \mapsto a + \ell q^2$. נסמן את הצפיפות החדשה ב־ δ_1 ונגדיר את הפונקציה

$$f_1 = \mathbf{1}_{S_1} - \frac{|S_1|}{N_1}$$

אם $\left|\mathbb{E}\left(f_1(x)f_1(x+d^2)\right)\right| < \frac{\delta_1^2}{2}$ אז ניצחנו כי כל הפרש ריבועי ב־ S_1 מתאים להפרש ריבועי ב־ S. אחרת נקבל קבוצה חדשה $S_2 \subset [N_2]$ ומקיימת $|S_2| \ge N_2\left(\delta_2 + d(\delta_2)\right)$ (שכן $d(\delta)$ אינה יורדת). אחרי לכל היותר $\frac{1}{d(\delta)}$ פעמים שנפעיל את הטענה או שמצאנו כבר הרבה ריבועים ($N\sqrt{N} >>_\delta$, כלומר יותר מקבוע שתלוי ב־ δ כפול $N\sqrt{N}$) או שנקבל קבוצה שהצפיפות שלה היא 1, (נשים לב ש־ $|\tilde{S}| >>_\delta N$) ומספיק שיהיו בה שני איברים כדי שנסיים. במילים אחרות לכל $\delta > 0$ לכל N מספיק גדול מתקיים שיש הפרש ריבועים. עתה נוכיח את הטענה.

הוכחת הטענה: נשתמש באנליזת פורייה דיסקרטית־ החבורה שלנו תהא $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ ובהנתן פונקציה $f : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ נתבונן במקדמי פוריה שלה־

$$\hat{f}(n) = \mathop{\mathbb{E}}_{y \in G} f(y) e\left(\frac{ny}{N}\right), \quad e\left(\frac{ny}{N}\right) := e^{\frac{2\pi i n y}{N}}$$

במקרה זה נקבל ש־

$$f(x) = \sum \hat{f}(n) e\left(-\frac{nx}{N}\right)$$

וממשפט פרסבל מתקיים

$$\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G}|f(y)|^2=\sum_{n\le N}\left|\hat{f}(n)\right|^2$$

נתבונן בפיתוח פוריה שכזה עבור הפונקציה שלנו, $f=\mathbf{1}_S(x)-\delta$, אז־

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(f(x)f(x+d^2)\right) &= \mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(\sum_{n,m\le N}\hat{f}(n)\hat{f}(m)e\left(-\frac{nx-m(x+d^2)}{N}\right)\right)\\ &= \sum_{n,m\le N}\hat{f}(n)\hat{f}(m)\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(e\left(\frac{md^2}{N}\right)\right)\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(e\left(-\frac{(m-n)x}{N}\right)\right)\\ &= \sum_{n}\left|\hat{f}(n)\right|^2\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(e\left(\frac{md^2}{N}\right)\right)\end{aligned}$$

משפט $Weyl$ לכל $\alpha\notin\mathbb{Q}$ אז $\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}(e(d\alpha))\to 0$.
אנחנו נרצה הערכה כמותית (לא מאוד טובה, אך עדיין כמותית).

למה: אם $\left|\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(e\left(\frac{nd^2}{N}\right)\right)\right|>\eta$ אזי קיים $M<<_\eta 1$ ושני טבעיים $a,q\le M$ זרים כך ש־ $\frac{a}{q}=\frac{n}{N}$.
מספר ה־ n־ים הבעייתיים הוא לכל היותר M^2 (גם כן מספר חסום שתלוי רק ב־ δ).
איך זה יסכם את ההוכחה? אם n הוא נקודה בעייתית, אז יש תרומה אמיתית לסכום, אבל היא ממעט מאוד איברים. רוב האיברים (פרט למספר סופי) תורמים מאוד מאוד מעט. באופן פורמלי: נסמן ב־ M_η את הקבוצה הרעה, של האיברים הבעייתיים

$$\begin{aligned}\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(f(x)f(x+d^2)\right) &= \cdots=\sum_{n}\left|\hat{f}(n)\right|^2\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(e\left(\frac{nd^2}{N}\right)\right)\\ &\le \sum_{n\in M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2+\eta\sum_{n\notin M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2\le\sum_{n\in M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2+\eta\sum_{n}\left|\hat{f}(n)\right|^2\\ &= \sum_{n\in M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2+\eta\end{aligned}$$

כאשר האי שיוויון האחרון הוא משום שהפונקציה שלנו היא חסומה על ידי 1, והמידה של המרחב היא מידת הסתברות, ולכן והאנטגרל של הפונקציה הוא קטן שווה ל־1. סך הכל קיבלנו ש־

$$\frac{\delta^2}{2}\le\mathop{\mathbb{E}}_{d\le\sqrt{N}}\left(f(x)f(x+d^2)\right)\le\sum_{n\in M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2+\eta$$

ואם נבחר $\eta=\frac{\delta^2}{4}$ אז נקבל ש־

$$\sum_{n\in M_\eta}\left|\hat{f}(n)\right|^2\ge\frac{\delta^2}{4}$$

ובפרט קיים $n_0\in M_\eta$ כך ש־ 1 $\left|\hat{f}(n_0)\right|>>_\delta 1$. נרצה להסיק של־ S יש תת סדרה עם צפיפות גדולה.
נזכור כי

$$\hat{f}(n)=\mathop{\mathbb{E}}_{y\in G}f(y)e\left(\frac{ny}{N}\right)$$

וכן $\frac{n_0}{N}=\frac{a}{q}$ עבור $1 <<_\delta a,q$ (N עצום, δ חסום) ולכן

$$\begin{aligned} 1 <<_\delta \left|\hat{f}(n_0)\right| &= \left|\mathop{\mathbb{E}}_{x\in G} f(x) e\left(-\frac{a}{q}x\right)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_S-\delta\right) e\left(-\frac{a}{q}x\right)\right| = \left|\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_S e\left(-\frac{a}{q}x\right)\right)\right| \end{aligned}$$

ברור ש־ $a\neq 0$ כי אחרת האי שיויון הראשון לא יכול להתקיים. נראה שמזה מסיקים את הצפיפות־
נשים לב שהשוויון הראשון זה פשוט דרך אחרת לסכום את הטור,

$$\begin{aligned} 1 <<_\delta \left|\hat{f}(n_0)\right| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{y=1}^{\frac{N}{q}}\sum_{b=1}^{q} f(qy+b) e^{2\pi i (qy+b)\frac{a}{q}}\right| \\ &\le \frac{1}{q}\sum_{b\le q}\frac{1}{\frac{N}{q}}\left|\sum_{y\le\frac{N}{q}} f(qy+b)\right| \\ &= \frac{1}{q}\sum_{b\le q}\frac{1}{\frac{N}{q}}\left(\left|\sum_{y\le\frac{N}{q}} f(qy+b)\right| + \sum_{y\le\frac{N}{q}} f(qy+b)\right) \end{aligned}$$

משום שהתוחלת של f היא אפס, אז אנחנו למעשה מוסיפים 0, ולכן זה לא משנה את הסכום. ומשום ש־ $A+|A|=\max\{A,0\}$ הרי ש־קיים b כך ש־

$$1 <<_\delta \frac{1}{\frac{N}{q}}\left(2\max\left\{\sum_{y\le\frac{N}{q}} f(qy+b)\right\},0\right)$$

וכשאנו מציבים את ההגדרה של f אנחנו מקבלים ש־

$$\begin{aligned} 1 <<_\delta \frac{1}{\frac{N}{q}}\sum_{y\le\frac{N}{q}}(\mathbf{1}_S-\delta)(qy+b) &= \frac{1}{\frac{N}{q}}\sum_{y\le\frac{N}{q}}\mathbf{1}_S(qy+b)-\delta \\ \Rightarrow \delta+d(\delta) &< \frac{1}{\frac{N}{q}}\sum_{y\le\frac{N}{q}}\mathbf{1}_S(qy+b) \end{aligned}$$

לאן אפשר לקחת את השיטות הללו? היו לנו שתי גישות ואנחנו חקרנו את השאלה של מתי יש לנו הפרש ריבועי. מה שפתר את זה בגישה הארגודית היה שאם יש לי קבוצה עם מידה חיובית, במערכת שומרת מידה, והסכומים הארגודיים $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu\left(A\cap T^{-n^2}A\right)\not\to\mu(A)^2$, אז המערכת יושבת מעל $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, כלומר יש לה גורם ציקלי. בהקשר הקומבנטורי, הסיבה היא אותה סיבה. אם אנחנו מתבוננים על הממוצע של $\frac{1}{N\sqrt{N}}\sum\mathbf{1}_S(x)\cdot\mathbf{1}_S(x+d^2)$ ואם זה כמותית לא מתנהג כמו δ^2 אז הסיבה נעוצה בעובדה שלפונקציה $\mathbf{1}_S$ יש קורלציה עם $e\left(\frac{a}{m}x\right)$. ההקבלה עם משהו ציקלי בהקשר הארגודי, היא משהו חסום (שלא תלוי בגודל הקטע שלנו) בגישה הקומבינטורית.

אילו היינו חוקרים את הבעיה של סדרות חשבוניות מאורך 3 בקבוצות מצפיפות חיובית, אז בגישה הארגודית מתקיים שאם $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mu\left(A\cap T^{-n}A\cap T^{-2n}A\right) \not\to \mu(A)^3$ הסיבה לזה היא שיש מורפיזם בין X למעגל $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ עם העתקה של $+\alpha$ (שהוא אולי ראציונלי אבל אולי לא). בתוך המערכת של המעגל, אנחנו מתבוננים בשלשה $z, z+n\alpha, z+2n\alpha$ וזו הבעיה היחידה שגורמת לזה שהממוצעים שלמעלה לא שואפים למידה בשלישית. ובמקרה של מעגל זה לא קשה לפתור את הבעיה (כך שנפרק את הבעיה לשני מקרים ונפתור כל מקרה בנפרד). בגישה הקומבינטורית, הטענה היא שאם אנחנו יודעים ש־$\frac{1}{N^2}\sum \mathbf{1}_S(x)\mathbf{1}_S(x+d)\mathbf{1}_S(x+2d)$ זה לא מה שאנו מצפים בקבוצה אקראית ($=\delta^3$) אז יש לפונקציה $\mathbf{1}_S$ קורלציה עם איזשהו אקספוננט.
מה עם סדרות מאורך 4? אז שוב נעשה את אותו הרעיון, אם אנחנו יודעות ש־$x, T^n x, T^{2n}x, T^{3n}x$ אין להן התנהגות חופשית (מודולו המכשולים שמגיעים מכל שלשה) אז יש העתקה מ־X למרחב הבא־ החבורה היא חבורת הייזנברג, חבורה נילפוטנטית מסדר 2, מודולו שריג בתוכה שהוא כל המטריצות שבהן יש ערכים שלמים (נסמן $H(\mathbb{R})/H(\mathbb{Z})$) זו אינה תת חבורה נורמלית. סוג של סיבוב מוכלל.
התמונה הקומבינטורית־ זה מכונה אנליזת פוריה מסדר יותר גבוהה, והתמונה היא מקבילה. אם לא מקבלים את המקרה האקראי אז $\mathbf{1}_S$ יש לה קורלציה עם פונציה שמגיעה מקדמים של טורי פוריה $f(n) = F\left(a^n g\Gamma\right)$ עבור F מחבורה נילפוטנטית למרוכבים. באופן כללי השיטה הקומבינטורית היא יותר חזקה, היא מראה שאפשר להגיע לצפיפות שהיא מאוד מאוד קטנה. לשיטה הארגודית אין יכולת להתמודד עם המקרים הללו כי מתקבלות קבוצות עם מידה אפס. מה שכן משום שהמשפטים הם טהורים ואין בם רכיב אלגברי, אז למשל כדי למצוא סדרות מהצורה $x, x+n, x+n^2, \cdots$ ויש הוכחה ארגודית שמראה שסדרות כאלו קיימות, אבל הגישה הקומבינטורית מאוד מורכבת ולא נותנת לנו יותר מידע.