



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג (7.9.2017)

משך המבחן – 3 שעות.

אין להשתמש במחשבון או חומר עזר.

יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 15 נקודות זכות

1. הוכיחו: סכום הקוביות של n המספרים הטבעיים הראשונים שווה לריבוע הסכום שלהם, במילים אחרות, הוכיחו: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$, לכל $1 \leq n$.

2. מספר של מכונית מורכב מ-7 ספרות עשרוניות עם ספרה ראשונה שאינה 0.

א. לכמה מכוניות ניתן להנפיק מספר שכל ספרותיו שונות זו מזו? האם מספר מכוניות זה גדול מחצי מיליון? גדול ממיליון?

ב. פי כמה יוכפל מספר זה של מכוניות אם תוסר ההגבלה על הספרה הראשונה וגם היא תותר להיות אפס?

3. מצולע משוכלל בעל 12 צלעות חסום במעגל שרדיוסו 1. מהו שטח המצולע?

4. א. מצאו את קבוצת כל המספרים המרוכבים z המקיימים את השוויון $|z - i| = |z + i|$ ותנו תיאור גיאומטרי שלה במישור המרוכב (רצוי גם לכלול תרשים מתאים).

ב. מצאו את קבוצת כל המספרים המרוכבים z המקיימים את אי השוויון $|z + 1| > 2$ ותנו תיאור גיאומטרי שלה במישור המרוכב (רצוי גם לכלול תרשים מתאים).

5. בהינתן תת-קבוצה A של קבוצת המספרים ממשיים (סימון מקוצר: $A \subset \mathbf{R}$), נגיד שמספר ממשי m הוא חסם עליון של הקבוצה A , אם $a \leq m$ לכל $a \in A$.

נניח שלקבוצות A ו- B יש חסמים עליונים, כאשר $A, B \subset \mathbf{R}$.

א. נגדיר את הקבוצה $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, כלומר קבוצת כל הסכומים של איבר מ- A ואיבר מ- B . האם ל- C יש בהכרח חסם עליון? הוכיחו תשובתכם.

ב. נגדיר את הקבוצה $D = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$, כלומר קבוצת כל המכפלות של איבר מ- A באיבר מ- B . האם ל- D יש בהכרח חסם עליון? הוכיחו תשובתכם.

6. איזהו הגדול יותר מבין השניים: $\log_{11}(120)$ או $\log_{12}(150)$?

7. מהו הערך הגדול ביותר של $\sin x + \cos x$ עבור מספר ממשי x כלשהו? עבור איזה ערכי x מתקבל הערך הזה? תזכורת: $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$

בהצלחה!