



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג (19.08.22)

- משך המבחן: 3 שעות
- אין להשתמש במחשבון או בחומר עזר כלשהו
- יש להוכיח כל טענה באופן מלא
- תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות
- בשאלות בהן הסעיפים אינם תלויים זה בזה הדבר מצוין במפורש

שאלה 1

נתונה הפונק' : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

- (א) (3 נק') האם הפונק' זוגית / אי-זוגית / לא זוגית ולא אי-זוגית? הסבירו.
- (ב) (5 נק') הוכיחו / הפריכו: הפונק' f היא על.
- (ג) (5 נק') הוכיחו: אם x_1 ו- x_2 הם הופכיים (כלומר: מכפלתם שווה ל-1), אז התמונות שלהם שוות. מה ניתן להסיק מכך על החד-חד ערכיות של f ?
- (ד) (4 נק') האם הפונקציה f הפיכה? הסבירו.

שאלה 2

הערה: בשאלה זו סעיפים א' וב' אינם תלויים זה בזה

- (א) (8 נק') הראו כי לכל $z \in \mathbb{C}$ ועבור $n = 2, 3$ מתקיים: $(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$.
- (ב) נתונה המשוואה הבאה: $z^3 - 7z^2 + bz - 25 = 0$ כאשר $b \in \mathbb{R}$.
- ידוע בנוסף כי $z_0 = 1 - 2i$ הינו פתרון של המשוואה.
1. (5 נק') מצאו את ערך הפרמטר b .
2. (4 נק') הראו כי גם \bar{z}_0 הינו פתרון של המשוואה.

שאלה 3

נתון כי מתקיים: $\tan(x) + \frac{1}{\cos(x)} = \frac{3}{2}$

- (א) (4 נק') מצאו את תחום ההגדרה של המשוואה.
- (ב) (13 נק') חשבו את הערכים האפשריים של $\sin(x)$.



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

שאלה 4

הערה: בשאלה זו סעיפים א' וב' אינם תלויים זה בזה

(א) (9 נק') הוכיחו: בכל סדרת מספרים a_1, a_2, \dots, a_n לפחות אחד האיברים גדול או שווה לממוצע שלהם.

תזכורת(ממוצע): $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$

(ב) (8 נק') פתרו את אי-השוויון הבא: $\log_{|x|}(5) \geq \log_5(x)$

שאלה 5

(א) (4 נק') הוכיחו: מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$ היא 4^n .

(ב) (4 נק') מהו מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל $2n$? הסבירו.

(ג) (4 נק') הוכיחו: $4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$

תזכורת(הבינום של ניוטון): $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

(ד) (5 נק') הסבירו ע"י טיעון קומבינטורי, מדוע השוויון מסעיף ג' מתקיים.

שאלה 6

(א) (11 נק') הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots - (2n)^2 + (2n + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)$$

(ב) (6 נק') חשבו את ערך הביטוי הבא: $15^2 - 16^2 + 17^2 - 18^2 + \dots - 50^2 + 51^2$.