



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler **הפקולטה למדעים מדויקים**
 Faculty of Exact Sciences **ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר**
 Tel Aviv University **אוניברסיטת תל אביב**

מבחן סיווג במתמטיקה 12.07.2024

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר

יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. (א) מצאו את כל ערכי $z \in \mathbb{C}$ עבורם $z^6 + (8 - i)z^3 - 8i = 0$.
 (ב) חשבו את שטח המשולש במישור גאוס, המוגדר ע"י ערכי z מסעיף א' עבורם $\text{Im}\{z\} > 0$.

2. כל מספר $x \in \mathbb{R}^+$ ניתן לפרק לסכום של הערך השלם התחתון, שיסומן ע"י $[x]$, שהוא המספר השלם הגדול ביותר הקטן או שווה ל- x , ולערך השברי שלו, שיסומן ע"י $\{x\}$. כלומר:
 $\forall x \in \mathbb{R}^+ : x = [x] + \{x\}$
 למשל: $0.75 = [0.75] + \{0.75\} = 0 + 0.75$, $3.5 = [3.5] + \{3.5\} = 3 + 0.5$.
 (א) יהי $k \in \mathbb{N}$ ונסמן $y = k + \frac{1}{k}$. הראו כי מתקיים: $\{y^2\} = \{y\}^2$.
 (ב) יהי $x > 1$. הוכיחו כי: $\{x^2\} = \{x\}^2 \rightarrow x \in \mathbb{Q}$.

3. (א) הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-5 ללא שארית.
 (ב) האם הביטוי $3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלק ב-30 לכל $n \in \mathbb{N}$ זוגי? הסבירו.

4. מצאו את כל ערכי $x \in \mathbb{R}$ המקיימים: $3\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}+1} - 33 \leq -8 \cdot 3\sqrt{\frac{1}{|\cos(x)|}}$.

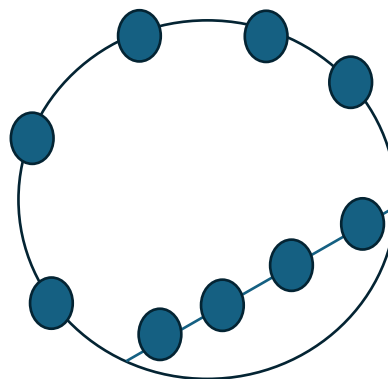
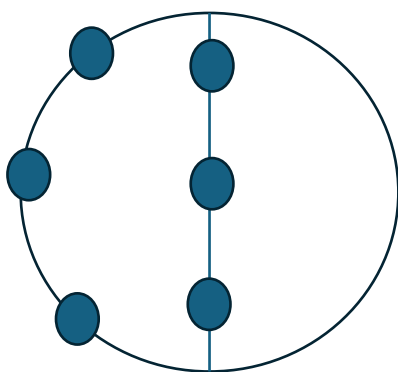
5. בכל אחד מן הסעיפים הבאים קבעו אם הטענה נכונה או שגויה והסבירו.
 נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, נגדיר את הפונקציות הבאות: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ כך
 שמתקיים: $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}, h(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$.
 (א) הפונקציה g אי-זוגית והפונקציה h זוגית.
 (ב) ייתכן והפונקציה h היא חד-חד ערכית (חח"ע).
 (ג) הפונקציה $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא בהכרח אי-זוגית.
 (ד) אם ניתן לרשום את הפונקציה f כסכום של פונקציה זוגית H ופונקציה אי-זוגית G ,
 כלומר $f = G + H$, אזי מתקיים שבהכרח מתקיים כי $G = g, H = h$.



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

6. נניח מעגל ועליו $n \geq 3$ נקודות שונות. במעגל זה, עובר מיתר כך שהיקף המעגל מתחלק ל-2: חלק אחד עם כל n הנקודות, וחלק אחד ללא נקודות. על המיתר ישנן $k \geq 3$ נקודות, כך שכל הנקודות נמצאות על המיתר ולא על המעגל. לא ייתכן מצב בו נקודה מתוך n הנקודות שעל המעגל נמצאת על החיתוך של המיתר עם המעגל. דוגמאות:



דוגמה זו תואמת עבור $n = 3, k = 3$.

דוגמה זו תואמת עבור $n = 5, k = 4$. שימו לב כי אין הכרח למרחקים שווים בין הנקודות.

- (א) כמה משולשים ניתן ליצור מהנקודות שעל המעגל ולא על המיתר?
(ב) כמה משולשים ניתן ליצור מכל הנקודות (על המעגל ועל המיתר)?
(ג) כמה מרובעים שאחת מצלעותיהן היא חלק כל מהמיתר ניתן ליצור?