



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (21.05.2020 מועד קורונה)

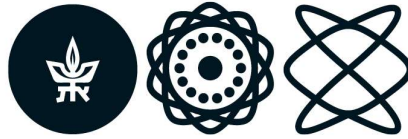
משך המבחן: שלוש שעות
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות
התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בראשו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ (שני מספרים ממשיים).
 א. הוכיחו כי $a \neq b$ אם-ורק-אם קיים $0 < c$ כך ש- $|a - b| > c$.
 ב. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חד-חד-ערכית. הוכיחו כי $a \neq b$ אם-ורק-אם קיים $0 < c$ כך ש-

$$|f(a) - f(b)| > c$$
 האם טענה זו תישאר תקפה גם כאשר הפונקציה הנתונה אינה חד-חד-ערכית? הוכיחו או הפריכו.
 שימו לב: הביטוי "אם-ורק-אם" משמעו שיש להוכיח טענה והיפוכה.
2. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n ולכל מספר ממשי $-1 < x$, $(1+x)^n \geq 1+nx$. עבור אלו n ו- x מתקיים השוויון?
3. מצאו את קבוצות המספרים הממשיים x שעבורם מתקיים כל אחד מאי השוויונות הבאים:
 א. $|\log_2 x| > 1$ ב. $\log_2 x + \log_x 2 > 3$
4. א. בהיות z מספר מרוכב השונה מ-0 ומ-1, הוכיחו שלכל מספר טבעי $1 \leq n$,

$$z^{-n} + z^{-n+1} + \dots + z^{-1} + 1 + z + \dots + z^{n-1} + z^n = \frac{z^{n+1} - z^{-n}}{z-1}$$
 ב. כזכור $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ כאשר x מספר ממשי. הוכיחו שלכל t ממשי

$$\sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$
5. נתונות n נקודות במישור ש- $3 \leq k$ מהן נמצאות על ישר אחד (כל אחת מאלה נמצאת על הישר הנקבע על ידי שתיים אחרות מהן). כל n הנקודות הנתונות מסודרות כך שלמעט הישר המכיל את k הנקודות ה"ל", אין ישר נוסף המכיל יותר משתיים מהנקודות. קבעו, כפונקציה של k ו- n , כמה משולשים שונים שקדקודיהם בנקודות הנתונות ניתן להרכיב?



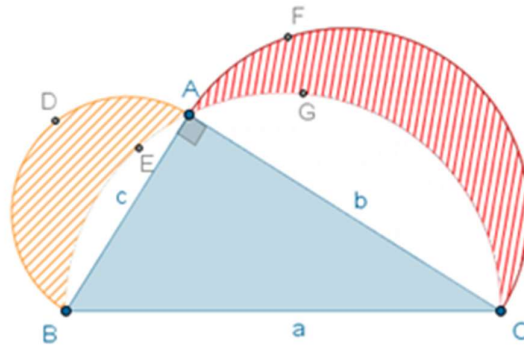
School of Mathematical Sciences
 The Raymond and Beverly Sackler
 Faculty of Exact Sciences
 Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
 הפקולטה למדעים מדויקים
 ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
 אוניברסיטת תל אביב

6. (סהרוני היפוקרטס). נתון משולש ישר זווית החסום במעגל. בתרשים מטה מופיע רק חצי המעגל.

א. הראו שהתרשים מטה משקף נכונה את המבנה הגיאומטרי הנתון, כלומר הוכיחו שאם הצלע הגדולה של המשולש החסום היא מיתר שאינו קוטר, אז הזווית שמולה אינה ישרה.

ב. על כל אחד מניצבי המשולש (כלפי החוץ שלו) בונים חצי מעגל שקוטרו הוא הניצב ומרכזו אמצע אותו ניצב (ראו תרשים). כך נוצרים שני סהרונים (ירחים) המוגבלים בין חצאי המעגלים שהוספנו לבין הקשתות המתאימות של המעגל החסום את המשולש. הוכיחו שסכום שטחי שני הסהרונים שווה לשטח המשולש.



ב ה צ ל ח ה