



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (07.05.2021)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. רשמו במחברת שתי דיאגרמות ון עבורן.
 - א. באחת הדיאגרמות סמנו את הקבוצה $D := (A \cup B) \setminus C$ (2 נקודות)
 - ב. בדיאגרמה האחרת סמנו את הקבוצה $E := A \cup (B \setminus C)$ (2 נקודות)
 - ג. הוכיחו (פורמלית) כי $D \subseteq E$ (7 נקודות)
 - ד. האם תמיד גם $E \subseteq D$? אם לא תמיד, אז באילו תנאים כן? (6 נקודות)

2. הסדרה a_1, a_2, a_3, \dots מוגדרת על ידי $a_n = n \cdot n!$ (עבור $1 \leq n$). נגדיר $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ (סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה). הוכיחו כי $S_n < a_{n+1}$ לכל n טבעי.

3. קבעו עבור אלו ערכי x (ממשיים) מוגדר הביטוי $\log_x |x^2 - 1|$ ומצאו את כל ערכי x שעבורם ביטוי זה הוא שלילי, כלומר קטן מ-0.

4. א. תהי $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ זווית כך ש- $\operatorname{tg} \alpha = 3$, מהו $\sin \alpha$? (9 נקודות)
 ב. השתמשו בנוסחאות סינוס וקוסינוס של זווית כפולה כדי לבטא את $\operatorname{tg} 2x$ באמצעות (כפונקציה של) $\operatorname{tg} x$. (8 נקודות)

2/-



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

5. א. הוכיחו באופן אלגברי טהור, ללא שיקולים גיאומטריים, כי לכל שני מספרים מרוכבים z ו- w ,

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad (12 \text{ נקודות}).$$

ב. הסבירו בקצרה מדוע נקרא אי שוויון זה בשם אי שוויון המשולש (5 נקודות).

6. הוכיחו שבין כל 5 מספרים טבעיים (לאו דווקא שונים זה מזה) אפשר למצוא 3 שסכומם מתחלק ב-3.

א. חשבו על השאריות האפשריות כאשר מחלקים מספר טבעי ב-3, על ערכיהן ומספרן.

ב. שימו לב: כאשר מחלקים סכום של מספרים טבעיים ב-3, השארית של הסכום שווה לסכום השאריות של

המחבורים (ואם סכום זה עדיין אינו קטן מ-3, מחלקים אותו שוב ב-3 ולוקחים את השארית).

ב ה צ ל ח ה