



School of Mathematical Sciences **בית הספר למדעי המתמטיקה**
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברברי סאקלר
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה (08.04.2022)

משך המבחן: שלוש שעות

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות

1. א. יהי n מספר טבעי. הוכיחו שאם $2^n - 1$ ראשוני (אין לו מחלקים זולת עצמו ו-1) אז גם n ראשוני. (8 נקודות)

ב. הוכיחו שאם $2^n - 1$ הוא מספר ראשוני (ואז, על פי סעיף א', גם n ראשוני) אז $N := 2^{n-1}(2^n - 1)$ הוא פרפקטי (מושלם) כלומר N שווה לסכום כל מחלקיו, לרבות 1 ולמעט הוא עצמו. (9 נקודות)

2. תהיינה C, B, A קבוצות. הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

א. אם $(A \cup B) \cap C = \emptyset$ וגם $A \cup C = B \cup C$ אז $A = B$ (9 נקודות)

ב. אם $A \cap B \cap C = \emptyset$ וגם $A \cap C = B \cap C$ אז $A = B$ (8 נקודות)

3. א. מצאו את כל ערכי t הממשיים שעבורם $|t-2| + |t-4| < 30$ (7 נקודות)

ב. מצאו את כל ערכי x הממשיים שעבורם $|x^2 - 7x - 2| + |x^2 - 7x - 4| < 30$ (10 נקודות)

4. נעין בסדרה $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n}$ ($n \geq 1$). א. חשבו את ערכם המספרי של a_1, a_2, a_3, a_4

ב. הוכיחו שלכל n טבעי $a_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (7 נקודות)

ג. הוכיחו שלכל n טבעי $\sum_{k=1}^n a_k \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ (8 נקודות)



School of Mathematical Sciences בית הספר למדעי המתמטיקה
The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים
Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד וברלי סאקלר
Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

5. תהי X קבוצה בת $2 \leq n$ איברים ויהיו b, a שני איברים שונים של X

- א. כמה קבוצות חלקיות של X הן זרות לקבוצה $\{a, b\}$? (4 נקודות)
- ב. כמה מהן מכילות את הקבוצה $\{a, b\}$? (6 נקודות)
- ג. כמה מהקבוצות האלו מכילות את a או את b אבל לא את שניהם? (7 נקודות)
- בטאו את תשובתיכם כפונקציה של n .

6. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

ב ה צ ל ח ה