School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

# מבחן סיווג במתמטיקה (31.12.2021)

**משך המבחן: שלוש שעות**

אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר
יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

**התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות**

**1.** א. הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=1+\frac{\sin 2\alpha}{2}$ (9 נקודות)

ב. עבור כל הזוויות $\alpha$ בקטע $[0,2\pi]$ שהטנגנס שלהן שווה 3-, חשבו את הסינוס שלהן (לא נדרש לקבוע את גודל הזוויות עצמן, רק למקמן בתתי-קטע מתאימים) (8 נקודות)

**2.** א. מצאו את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה $|x-2|+|x+2|=4$ (8 נקודות)

ב. יהיו $a,b,c>1$ מספרים ממשיים. פשטו את הביטוי

$$\frac{2}{1+\log_a(b\cdot c)}+\frac{2}{1+\log_b(c\cdot a)}+\frac{2}{1+\log_c(a\cdot b)}$$

ומצאו את ערכו המספרי (ערך הביטוי אינו תלוי ב- $c,b,a$) (9 נקודות)

**3.** א. הוכיחו: אם $0<a<1<b$, אז $a\cdot b+1<a+b$ (6 נקודות)

ב. טענה: לכל $2\le n$ (מספר טבעי), אם המכפלה של $n$ מספרים חיוביים שווה 1, אז סכומם הוא לפחות $n$. בהנחה שטענה זו נכונה עבור $n=2$ (והיא אכן נכונה) הוכיחו אותה עבור $n=3$ וקבעו באילו תנאים סכום שלושת המספרים הוא 3 בדיוק (11 נקודות)

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

**4.** הוכיחו שלכל $n$ טבעי, $5^n-3^n-2^n$ מתחלק ב-6 ללא שארית

**5.** מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^6-7z^3-8=0$ והציגו אותם בהצגה קרטזית, כלומר בצורה $z=x+iy$.

**6.** $$2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}\quad (n=1,2,3,\ldots)\ )$$

א. הוכיחו אחד בלבד משני אי-שוויונות אלה לפי בחירתכם; ציינו איזה מהם בחרתם להוכיח (5 נקודות)

ב. הוכיחו שלכל $n$ טבעי (רק עבור $n=1$ יש שוויון באי-שוויון הימני) (9 נקודות)

$$2\sqrt{n}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$

ג. חשבו את הערך השלם של $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}$ (3 נקודות)

כזכור, הערך השלם של מספר ממשי הוא המספר השלם הגדול ביותר שהוא קטן מהמספר הממשי המדובר, או שווה לו.

**ב ה צ ל ח ה**