



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 5.9.2025 - פתרון

הנחיות הבחינה:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- אין להיעזר במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות רגילות ושאלת בונוס לקבוצות B ו C - בלבד. יש לפתור את כל השאלות. תשובה מלאה ונכונה נושאת 17 נקודות זכות לכל שאלה רגילה ו- 10 נקודות לשאלת הבונוס. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.

בהצלחה!!!

1. יהיו A, B, C, D קבוצות.

א. (11 נק') הוכיחו: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

ב. (6 נק') הוכיחו/הפריכו: $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

הערה: אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה, ואם הטענה לא נכונה יש לספק דוגמה נגדית.

פתרון:

א. הטענה נכונה. נוכיח בהכלה דו-כיוונית.

ראשית נוכיח כי $(A \cap B) \times (C \cap D) \subseteq (A \times C) \cap (B \times D)$

יהי $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

אז מהגדרת מכפלה קרטזית, מתקיים $x \in A \cap B$ וגם $y \in C \cap D$.

לכן, מתקיים $x \in A, y \in C$ ולכן $(x, y) \in A \times C$.

בנוסף מתקיים $x \in B, y \in D$ ולכן $(x, y) \in B \times D$.

לכן מהגדרת חיתוך קבוצות נובע כי מתקיים:

$$(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$$

בכיוון השני, נוכיח כי $(A \times C) \cap (B \times D) \subseteq (A \cap B) \times (C \cap D)$.

יהי $(x, y) \in (A \times C) \cap (B \times D)$.

מהגדרת חיתוך, מתקיים $(x, y) \in A \times C$ וגם $(x, y) \in B \times D$.

אז מהגדרת מכפלה קרטזית נובע כי $x \in A$ וגם $x \in B$ ולכן $x \in A \cap B$.

באותו האופן, מתקיים $y \in C$ וגם $y \in D$ ולכן $y \in C \cap D$.

לכן מהגדרת מכפלה קרטזית מתקיים $(x, y) \in (A \cap B) \times (C \cap D)$.

כדרוש.

ב. הטענה לא נכונה. למשל, עבור קבוצות

$$A = \{1\}, \quad B = \{2\}, \quad C = \{3\}, \quad D = \{4\}$$

מתקיים:

$$A \times C = \{(1,3)\}, \quad B \times D = \{(2,4)\}$$

ולכן

$$(A \times C) \cup (B \times D) = \{(1,3), (2,4)\}$$

אבל

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$$

ולכן הקבוצות לא שוות.

2. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים :

$$4^x + 2^x < 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 8$$

פתרון :

נפשט את האי-שוויון :

$$4^x + 2^x < 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 8$$

$$(2^x)^2 + 2^x < 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 8$$

כעת, נסמן $t = 2^x$ אז מתקיים :

$$t^2 + t < 2 \cdot t^2 - 5 \cdot t + 8$$

$$0 < t^2 - 6t + 8 = (t - 4)(t - 2)$$

הפתרונות של האי-שוויון הם $t < 2$ או $t > 4$.

נציב בחזרה $t = 2^x$ ונקבל שמתקיים : $2^x < 2$ או $2^x > 4$.

כלומר מתקיים $2^x < 2^1$ או $2^x > 2^2$.

מאחר והפונקציה המעריכית 2^x היא מונוטונית עולה, זה מתקיים אמ"ם

: $x < 1$ או $x > 2$ ולכן בסך הכל קבוצות הפתרונות של האי-שוויון היא :

$$(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$$

3. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים :

$$3 \sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$$

פתרון :

נעזר בזהות הטריגונומטרית :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

ונקבל :

$$3 \sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$$

$$3 \sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos^2(x) + \sin^2 x = 1$$

$$4 \sin^2(x) = 1$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x) = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{אם } \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ אז:}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{או} \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{אם } \sin(x) = -\frac{1}{2} \text{ אז:}$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{או} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

לכן הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

4. פתרו את שני הסעיפים:

- א. (9 נק') מצאו את כל הפתרונות של המשוואה: $z^4 = 81\sqrt{3} + 81i$.
 ב. (8 נק') נסמן ב- z_1 את הפתרון של המשוואה שנמצא ברביע הראשון, ב- z_2 את הפתרון שנמצא ברביע השני, ב- z_3 את הפתרון שנמצא ברביע השלישי וב- z_4 את הפתרון שנמצא ברביע הרביעי. חשבו את שטח המשולש שקודקודיו הם z_1, z_2, z_4 .

פתרון:

$$\text{א. נסמן } w = 81\sqrt{3} + 81i$$

כדי לפתור את המשוואה נעבור להצגה פולרית של w . מתקיים

$$r = \sqrt{81^2 + 3 \cdot 81^2} = \sqrt{4 \cdot 81^2} = 162$$

$$\tan(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

מאחר וידוע כי ו- w נמצא ברביע הראשון, נסיק ש- $\theta = \frac{\pi}{6}$.

לכן $w = 162 \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ למשוואה יש 4 פתרונות, והם:

$$3^4\sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{24}\right), 3^4\sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{13\pi}{24}\right), 3^4\sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{25\pi}{24}\right), 3^4\sqrt[4]{2} \operatorname{cis}\left(\frac{37\pi}{24}\right)$$

ב. נשים לב שמדובר במשולש ישר ושווה שוקיים, שבו אורך היתר היא

$6^4\sqrt[4]{2}$, ואורך הגובה ליתר היא $3^4\sqrt[4]{2}$. לכן שטח המשולש הוא

$$\frac{3^4\sqrt[4]{2} \cdot 6^4\sqrt[4]{2}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

5. אלון אוהב לשחות בים מוקדם בבוקר. במשך שבועיים, אלון בודק בכל בוקר את מצב הים. אם אין גלים חזקים אלון הולך לשחות בים, ואם יש גלים חזקים הוא לא שוחה. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות לסדרת הבחירות של אלון במהלך השבועיים?

ב. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה בדיוק פעם אחת במהלך השבועיים?

ג. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה בדיוק פעמיים במהלך השבועיים?

ד. (5 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה לפחות 3 פעמים במהלך השבועיים?

הערה: ניתן להשאיר את התשובות לא מבושטות.

פתרון:

א. בכל יום יש שתי אפשרויות, ויש 14 ימים. לכן לאלון יש 2^{14} אפשרויות.

- ב. יש 14 אפשרויות לבחירת היום היחיד שבו אלון שוחה, ובשאר הימים הוא לא שוחה. לכן יש 14 אפשרויות כאלו.
 ג. מספר האפשרויות הוא כמספר הדרכים לבחור 2 מתוך 14 הימים, לכן יש

$$\binom{14}{2}$$

- ד. מספר האפשרויות שבהן אלון שחה לפחות 3 פעמים הוא מספר כל האפשרויות מלבד אלו שבהן אלון שחה פעמיים, פעם אחת, או 0 פעמים. יש אפשרות אחת שבה אלון לא שחה בכלל, ובסעיפים ב' ו-ג' חישבנו את את מספר האפשרויות שבהן אלון שחה פעם אחת ופעמיים ולכן התשובה היא:

$$2^{14} - \binom{14}{2} - 15$$

6. (17 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k-1} = \frac{4^n(3n-1) + 1}{9}$$

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה - אכן, עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{k=1}^1 k \cdot 4^{k-1} = 1 \cdot 4^0 = \frac{4^1(3-1) + 1}{9}$$

צעד האינדוקציה - נניח כי הטענה נכונה עבור n , כלומר מתקיים:

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k-1} = \frac{4^n(3n-1) + 1}{9}$$

אז מתקיים:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 4^{k-1} &= 4^n(n+1) + \sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k-1} \\
&= 4^n(n+1) + \frac{4^n(3n-1) + 1}{9} \\
&= \frac{9 \cdot 4^n(n+1) + 4^n(3n-1) + 1}{9} \\
&= \frac{4^n(9n+9+3n-1) + 1}{9} = \frac{4^n(12n+8) + 1}{9} \\
&= \frac{4^{n+1}(3n+2) + 1}{9} = \frac{4^{n+1}(3(n+1)-1) + 1}{9}
\end{aligned}$$

כדרוש.

7. (10 נק') שאלת בונוס (לקבוצות B ו-C בלבד): תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה כך ש-
 $|A| = 5$. כלומר, A קבוצה של 5 מספרים טבעיים שונים. הוכיחו כי קיימים 4
מספרים שונים $a, b, c, d \in A$ כך ש- $a + b + c + d$ הוא מספר זוגי.
רמז: נסו לחלק למקרים לפי מספר המספרים הזוגיים שיש ב-A.

פתרון:

אם כל המספרים ב-A הם זוגיים - אז כמובן שכל קבוצה של 4 איברים מקיימת את התנאי.

אם כל המספרים ב-A הם אי-זוגיים - אז כל קבוצה של 4 איברים מקיימת את התנאי, כי לכל 4 מספרים אי-זוגיים מתקיים:

$$\begin{aligned}
(2n+1) + (2m+1) + (2k+1) + (2r+1) \\
= 2(n+m+k+r+2)
\end{aligned}$$

אם יש ב-A לפחות מספר אחד זוגי ולפחות מספר אחד אי-זוגי - אם סכום כל האיברים ב-A זוגי, נחסר ממנו את האיבר הזוגי ונקבל סכום של 4 המספרים הנותרים שווה להפרש של שני מספרים זוגיים, ולכן זוגי.

אם סכום כל האיברים ב- A הוא אי-זוגי, נחסר ממנו את האיבר האי-זוגי ונקבל כי סכום 4 המספרים הנותרים שווה להפרש של שני מספרים אי-זוגיים, ולכן זוגי.