



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 5.9.2025

הנחיות הבחינה:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- אין להיעזר במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות רגילות ושאלת בונוס לקבוצות B ו C - בלבד. יש לפתור את כל השאלות. תשובה מלאה ונכונה נושאת 17 נקודות זכות לכל שאלה רגילה ו- 10 נקודות לשאלת הבונוס. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.

בהצלחה!!!

1. יהיו A, B, C, D קבוצות.

א. (11 נק') הוכיחו: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

ב. (6 נק') הוכיחו/הפריכו: $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$.

הערה: אם הטענה נכונה יש להוכיח אותה, ואם הטענה לא נכונה יש לספק דוגמה נגדית.

2. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים:

$$4^x + 2^x < 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 8$$

3. (17 נק') מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ שמקיימים:

$$3 \sin^2(x) + \cos^2(x) - \cos(2x) = 1$$

4. פתרו את שני הסעיפים:

א. (9 נק') מצאו את כל הפתרונות של המשוואה: $z^4 = 81\sqrt{3} + 81i$.

ב. (8 נק') נסמן ב- z_1 את הפתרון של המשוואה שנמצא ברביע הראשון, ב- z_2

את הפתרון שנמצא ברביע השני, ב- z_3 את הפתרון שנמצא ברביע השלישי

וב- z_4 את הפתרון שנמצא ברביע הרביעי. חשבו את שטח המשולש

שקודקודיו הם z_1, z_2, z_4 .

5. אלון אוהב לשחות בים מוקדם בבוקר. במשך שבועיים, אלון בודק בכל בוקר את מצב הים. אם אין גלים חזקים אלון הולך לשחות בים, ואם יש גלים חזקים הוא לא שוחה. פתרו את הסעיפים הבאים:

א. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות לסדרת הבחירות של אלון במהלך השבועיים?

ב. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה בדיוק פעם אחת במהלך השבועיים?

ג. (4 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה בדיוק פעמיים במהלך השבועיים?

ד. (5 נק') כמה אפשרויות שונות קיימות שבהן אלון שחה לפחות 3 פעמים במהלך השבועיים?

6. (17 נק') הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים :

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 4^{k-1} = \frac{4^n(3n-1) + 1}{9}$$

7. (10 נק') שאלת בונוס (לקבוצות B ו-C בלבד) : תהי $A \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה כך ש-
 $|A| = 5$. כלומר, A קבוצה של 5 מספרים טבעיים שונים. הוכיחו כי קיימים 4
מספרים שונים $a, b, c, d \in A$ כך ש- $a + b + c + d$ הוא מספר זוגי.
רמז : נסו לחלק למקרים לפי מספר המספרים הזוגיים שיש ב- A .