



**School of Mathematical Sciences** בית הספר למדעי המתמטיקה  
 The Raymond and Beverly Sackler הפקולטה למדעים מדויקים  
 Faculty of Exact Sciences ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
 Tel Aviv University אוניברסיטת תל אביב

**מבחן סיווג במתמטיקה (08.09.2023)**

משך המבחן: שלוש שעות  
 אין להשתמש במחשבון או בכל חומר עזר אחר  
 יש להוכיח כל טענה באופן מלא. תשובה נכונה ומלאה לכל שאלה נושאת 17 נקודות זכות

**התחילו כל שאלה בדף חדש וציינו בהבלטה את מספר השאלה. מחקו טיוטות**

1. תהי  $a$  ספרת היחידות בהצגה עשרונית של מספר טבעי  $N$ . הוכיחו שאם  $\frac{N-a}{10} - 2a$  מתחלק ב-7 (ללא שארית) אז גם  $N$  מתחלק ב-7 (ללא שארית).

2. שני מספרים חיוביים שונים  $x$  ו- $y$  מקיימים את השוויונים

$$\log_2 x + \log_x 2 = \frac{10}{3} = \log_2 y + \log_y 2$$

חשבו את  $x+y$ .

3. א. הוכיחו שלכל  $n$  טבעי  $\frac{10^n - 1}{9} = 111\dots1$  כאשר  $n$  הוא מספר האחדות באגף שמאל.

ב. חשבו את הערך המספרי של  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(111\dots1 - 33\dots300\dots0)}$  כאשר מספר האחדות במחוסר הוא  $3n$  ומספרי השלשות והאפסים במחסר הוא כל אחד  $n$ .

4. א. מצאו את כל פתרונות המשוואה:  $z \in \mathbb{C}, z^6 = -27$ .

ב. מצאו את כל פתרונות המשוואה:  $w \in \mathbb{C}, (w + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^6 = -27$ .

ג. חשבו את שטח המצולע הנקבע ע"י הנקודות עבורן מתקיים:  $\text{Im}(w) \in (-1,1)$ .



**School of Mathematical Sciences**  
The Raymond and Beverly Sackler  
Faculty of Exact Sciences  
Tel Aviv University

**בית הספר למדעי המתמטיקה**  
הפקולטה למדעים מדויקים  
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר  
אוניברסיטת תל אביב

5. אדם עומד במרכזו של שדה שצורתו ריבוע שאורך צלעו 100 מטר. בכל דקה על האדם לבצע 2 צעדים באורך מטר כל אחד, הצעד האחד בכיוון צפון/דרום והשני בכיוון מזרח/מערב.

- א. כמה מסלולים שונים זה מזה יוכל האדם לבצע ב-10 דקות?
- ב. כמה מסלולים בני 10 דקות מסתיימים חזרה במרכז השדה?
- ג. כמה מהמסלולים בני 10 דקות מסתיימים בדיוק מטר אחד צפונה מהמרכז?
- ד. בכמה מסלולים בני 10 דקות יהיה האדם רחוק מהמרכז לפחות במטר וחצי?

6. נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)} + \frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$

- א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה  $f$ . פרטו חישובים.
- ב. מצאו את התמונה של הפונקציה  $f$ .
- ג. פתרו את המשוואה הבאה:  $[f(x)]^{4 \sin^2(x)} + [f(x)]^{4 \cos^2(x)} = 10$ .