עיקרון שובך היונים

אוריאל רוזנצוויג

במסמך זה נכיר ונדגים את עיקרון שובך היונים. הניסוח של עיקרון זה אינטואיטיבי, אך מאפשר לנו להוכיח טענות רבות באופן מתמטי ומסודר.

משפט 0.1 – (עיקרון שובך היונים)

יהי $n \in \mathbb{N}$. אם נכניס $n+1$ יונים ל-n שובכים, אז בהכרח קיים שובך עם לפחות 2 יונים.

הטענה נשמעת הגיונית, ובכל זאת נוכיח אותה באופן מתמטי:

הוכחה

נמספר את השובכים במספרים $1, ..., n$. לכל חלוקה של היונים לשובכים, נסמן ב-p_i את מספר היונים בשובך ה-i. נניח בשלילה שקיימת חלוקה, בה בכל שובך תהיה לכל היותר יונה יחידה. אז:

$$n+1 = \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים מכיוון שיש בסה"כ $n+1$ יונים. קיבלנו $n+1 \leq n$ בסתירה, ולכן בכל חלוקה יהיה שובך בו יש לפחות שתי יונים.

בתרגילים אותם נפגוש בנושא הזה, לעיתים נשתמש בעיקרון שובך היונים כטענת עזר, ולעיתים נפתור את התרגיל באופן ישיר, בצורה שתזכיר את ההוכחה של עיקרון שובך היונים.

דוגמה 0.2

בכל קבוצה של 367 אנשים, יש לפחות שני אנשים שנולדו באותו תאריך. מדוע זה נכון?
יונים: האנשים.
שובכים: 366 ימות השנה (כולל ה-29.2).
נבצע התאמת יונים לשובכים בצורה הבאה. את היונה שמתאימה לפלונית נתאים לשובך שמתאים לתאריך הלידה שלה.
מעיקרון שובך היונים, קיים שובך (תאריך) בו נמצאות שתי יונים. כלומר, קיימות פלונית ואלמונית שנולדו באותו תאריך.

תרגיל 0.3

תהא $A \subseteq [9]$, ונייח ש-$|A| = 6$. הוכיחו שקיימים $a \neq b \in A$ כך ש-$a + b = 10$.

פתרון:
נפתור באמצעות שובך היונים:
יונים: 6 איברי הקבוצה A.
שובכים: הקבוצות $\{i, 10-i\}$ לכל $i \in [5]$.
נתאים את היונה ה-a לשובך $\{i, 10-i\}$ אם $a \in \{i, 10-i\}$.
מעיקרון שובך היונים קיימים $i \in 5$ ו-$a \neq b \in A$ כך ש-$a, b \in \{i, 10-i\}$. מכיוון שאלו איברים שונים, נובע $a + b = i + 10 - i = 10$.

תרגיל 0.4

נתונה קבוצה של 129 תלמידות. במשך שבוע, כל תלמידה תחליט האם לאכול או לאכול פיצה באותו יום.

1. כמה אפשרויות שונות לסדרת בחירות יש לכל תלמידה?
2. הוכיחו שקיימות לפחות שתי תלמידות שיאכלו פיצה בדיוק באותם הימים במהלך השבוע.

פתרון:

1. בכל יום כל תלמידה בוחרת האם לאכול פיצה או לא. כלומר, מתבצעת בחירה בין שתי אפשרויות, עם חשיבות לסדר ועם חזרות. לכן ישנן $2^7 = 128$ אפשרויות לכך.
2. נוכיח באמצעות שובך היונים.
יונים: 129 התלמידות.
שובכים: 128 האפשרויות לסדרת בחירות.
נתאים כל תלמידה לסדרת הבחירות שלה. מעיקרון שובך היונים, ישנן שתי תלמידות שיאכלו פיצה בדיוק באותם הימים לאורך השבוע.

תרגיל 0.5

בטורניר שח, מתמודדות $2 \leq n \in \mathbb{N}$ שחקניות. כל זוג שחקניות תשחקנה יחד בדיוק פעם אחת במהלך הטורניר.
נניח שבכל יום משוחק משחק יחיד עד לסיומו.

1. כמה ימים יוארך הטורניר?
2. הוכיחו שבסוף כל יום, ישנן שתי שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.

פתרון:

1. כל זוג שחקניות תשחקנה יחד פעם אחת בדיוק. כלומר, השאלה היא למעשה: כמה זוגות ניתן לבחור מתוך קבוצה של n שחקניות, והתשובה לכך היא $\binom{n}{2}$.
2. נחלק למקרים:
אם יש שתי שחקניות שטרם שיחקו, הן תהיינה הזוג.
אם כל השחקניות שיחקו עד כה, נשתמש בשובך היונים.

יונים: n שחקניות.
שובבים: המספרים $\{1, ..., n-1\}$.
נתאים בין כל שחקנית לשובך המתאים למספר המשחקים ששיחקה עד כה (לפחות פעם אחת, ולכל היותר $n-1$, מספר המשחקים שתשחק בסך הכל). מעיקרון שובך היונים, ישנו זוג שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.
במקרה האחרון, ישנה שחקנית יחידה שטרם שיחקה. שאר $n-1$ השחקניות, שיחקו לכל הפחות פעם אחת ולכן היותר $n-2$ פעמים (כי אף אחד לא שיחקה נגד השחקנית שטרם שיחקה). לכן בדומה למקרה הקודם, ישנו זוג שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.

תרגיל 0.6

על הישר הממשי נתון הקטע $A=[0,n)$, כאשר $n \in \mathbb{N}$. תהא $B \subseteq A$ קבוצה של $n+2$ נקודות. לכל $1 \leq i \leq n$, נסמן ב-$I_i = [i-1, i)$. הוכיחו שאחד מהתנאים הבאים מתקיים:

1. קיים $1 \leq i \leq n$ עבורו $|B \cap I_i| \geq 3$.
2. קיימים $1 \leq i, j \leq n$ כך ש-$i \neq j$ ו-$|B \cap I_i| \geq 2$, $|B \cap I_j| \geq 2$.

פתרון:
ראשית נבין את מה שמוגדר בהשאלה. לכל $1 \leq i \leq n$, הביטוי $p_i = B \cap I_i$ מציין את מספר הנקודות מ-B שנמצאות בקטע I_i.
כעת, נפתור את התרגיל בדומה להוכחת עיקרון שובך היונים. נניח בשלילה ששני התנאים לא מתקיימים. אז $p_i \leq 2$, לכל $1 \leq i \leq n$, וכמו כן קיים לכל היותר j יחיד עבורו לא מתקיים $p_j \leq 1$.
נחלק למקרים. במקרה הראשון, $p_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n$. ואז:

$$n+2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \leq \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

קיבלנו $n+2 \leq n$, אך זה לא ייתכן.
במקרה השני, $p_i \leq 2$, לכל $1 \leq i \leq n$, וקיים j יחיד עבורו מתקיים $p_j = 2$. במקרה זה:

$$n+2 = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} p_i + p_j \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} 1 + 2 = n-1+2 = n+1$$

קיבלנו $n+2 \leq n+1$ וגם זה לא ייתכן.