School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות מבחן סיווג במתמטיקה (08.09.2023)

1. תהי a ספרת היחידות בהצגה עשרונית של מספר טבעי N. הוכיחו שאם $\frac{N-a}{10}-2a$ מתחלק ב-7 (ללא שארית) אז גם N מתחלק ב-7 (ללא שארית).

פתרון: נסמן ב- M את המספר $\frac{N-a}{10}-2a$ ונקבל

$N=10\left(M+2a\right)+a=10M+21a=7(10m+3a)$ (באשר $m=\frac{M}{7}$) וזו כפולה של שבע.

זו בדיקה נוחה להתחלקות של מספר ב-7: במקום לבדוק ישירות את המספר הנתון בודקים מספר הקטן ממנו פי עשרה, ואם גם הוא גדול מדי מפעילים אותו תהליך לגביו, וחוזר חלילה במידת הצורך.

2. שני מספרים חיוביים שונים x ו y מקיימים את השוויונים

$$\log_2 x+\log_x 2=\frac{10}{3}=\log_2 y+\log_y 2$$

חשבו את $x+y$.

פתרון: נסמן ב- a את $\log_2 x$ ונקבל $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}\Rightarrow a=3\vee a=\frac{1}{3}\Rightarrow x=8\vee x=\sqrt[3]{2}$.

נשים לב שגם עבור y נקבל בדיוק את אותם הפתרונות, ומכיוון שידוע שהם שונים זה מזה ניתן להסיק כי: $x+y=8+\sqrt[3]{2}$.

3. א. הוכיחו שלכל n טבעי $111...1=\frac{10^n-1}{9}$ כאשר n הוא מספר האחדות באגף שמאל.

ב. חשבו את הערך המספרי של $\sqrt[3]{\frac{1}{3}(111\ldots1-33\ldots300\ldots0)}$ כאשר מספר האחדות במחוסר הוא $3n$ ומספרי השלשות והאפסים במחסר הוא כל אחד n.

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. נוכיח באינדוקציה.

מקרה הבסיס: עבור n=1 נקבל כי $1 = \frac{10^1-1}{9}$.

נניח כי הטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו, ונראה כי מתקיים: $\underbrace{111\dots1}_{n+1 \text{ פעמים}} = \frac{10^{n+1}-1}{9}$.

מתקיים: $\underbrace{111\dots1}_{n+1 \text{ פעמים}} = 10^n + \underbrace{111\dots1}_{n \text{ פעמים}} = 10^n + \frac{10^n-1}{9} = \frac{9*10^n + 10^n-1}{9} = \frac{10^{n+1}-1}{9}$,

כאשר השוויון השני נובע מהנחת האינדוקציה. בזאת סיימנו את ההוכחה.

ב. נעזר בתוצאת סעיף א' ונקבל:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\underbrace{111\dots1}_{3n \text{ פעמים}} - \underbrace{33\dots3}_{n \text{ פעמים}}\underbrace{00\dots0}_{n \text{ פעמים}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n}-1}{9} - 3 * \underbrace{111\dots1}_{n \text{ פעמים}} * 10^n\right)}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{10^{3n}-1}{9} - 3 * \frac{10^n-1}{9} * 10^n\right)} = \sqrt[3]{\frac{10^{3n} - 3 * 10^{2n} + 3 * 10^n - 1}{27}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\frac{10^n-1}{3}\right)^3} = \frac{10^n-1}{3}$$

4. א. מצאו את כל פתרונות המשוואה: $z^6 = -27$, $z \in \mathbb{C}$.

ב. מצאו את כל פתרונות המשוואה: $(w + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^6 = -27$, $w \in \mathbb{C}$.

ג. חשבו את שטח המצולע הנקבע ע"י הנקודות עבורן מתקיים: $\mathrm{Im}(w) \in (-1,1)$.

פתרון: א. נרשום בתצוגה פולארית: $-27 = 27cis(\pi)$. כעת, ע"י נוסחת דה-מואבר:

$$z_k = \sqrt[6]{27}cis\left(\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

ולכן, פתרונות המשוואה יהיו:

$$z_0 = \sqrt{3}cis\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_1 = \sqrt{3}cis\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}i, z_2 = \sqrt{3}cis\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = \sqrt{3}cis\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_4 = \sqrt{3}cis\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\sqrt{3}i, z_5 = \sqrt{3}cis\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

ב. נעזר בפתרונות מסעיף א', ונקבל כי: $w_k + \frac{\sqrt{3}}{2}i = z_k,\ k \in \{0,1,2,3,4,5\}$. ולכן, פתרונות המשוואה יהיו:

$$w_0 = \frac{3}{2}, w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i, w_2 = -\frac{3}{2}, w_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{3}i, w_4 = -\frac{3\sqrt{3}}{2}i, w_5 = \frac{3}{2} - \sqrt{3}i$$

ג. נשיב לב כי הנקודות המקיימות את התנאי הן $w_0=\frac{3}{2}, w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}i, w_2=-\frac{3}{2}$, שהרי החלק הדמיוני שלהם שייך לקטע הפתוח בין מינוס 1 ל-1. לכן, המצולע הנ"ל הינו משולש ששטחו הוא:

$$S_\Delta=\frac{3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

5. אדם עומד במרכזו של שדה שצורתו ריבוע שאורך צלעו 100 מטר. בכל דקה על האדם לבצע 2 צעדים באורך מטר כל אחד, הצעד הראשון בכיוון צפון/דרום והשני בכיוון מזרח/מערב.

א. כמה מסלולים שונים זה מזה יוכל האדם לבצע ב-10 דקות?

ב. כמה מסלולים בני 10 דקות מסתיימים חזרה במרכז השדה?

ג. כמה מהמסלולים בני 10 דקות מסתיימים בדיוק מטר אחד צפונה מהמרכז?

ד. בכמה מסלולים בני 10 דקות יהיה האדם רחוק מהמרכז לפחות במטר וחצי?

פתרון: א. מעיקרון הכפל, נקבל: $2^{10}\cdot 2^{10}=2^{20}$.

ב. נדרש שמתוך 10 הצעדים לכל כיוון, יהיו 5 לכל כיוון (לא משנה הסדר). לכן, מספר המסלולים המבוקש הינו $\binom{10}{5}^2$.

ג. כדי שמסלול יסתיים בדיוק מטר אחד צפונה מהמרכז, נדרש כי מספר הצעדים שהאדם יצעד צפונה, יהיה גדול ב-1 ממספר הצעדים שהוא צועד דרומה. במסלול של 10 דקות, מספר הצעדים בכיוון צפון\דרום הינו 10, ולכן לא קיימת חלוקה כזו של מספר צעדים (כדי שמקרה זה יהיה אפשרי, על האדם לצעוד בהכרח מספר אי זוגי של דקות – חשבו למה). לכן, לא קיימים מסלולים בני 10 דקות המסתיימים בדיוק מטר אחד צפונה מהמרכז.

שימו לב שהתשובה לא תשתנה גם אם הכיוונים יהיו דרום, מזרח ומערב.

ד. במסלולים בני 10 דקות, המסלול יכול להסתיים חזרה במרכז, או לפחות במרחק של 2 מטרים מן מרכז השדה (כל מקרה בו מספר הצעדים לכיוונים מנוגדים אינו זהה). לכן, נסיק כי מספר המסלולים הדרוש, הינו מספר המסלולים הכולל, להוציא את המסלולים המסתיימים בנקודת מרכז השדה ואלו הרחוקים מן המרכז במטר אחד. לכן, סך המסלולים הינו: $2^{20}-\binom{10}{5}^2$.

6. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sin^2(x)}{1+\cos(x)}+\frac{\sin^2(x)}{1-\cos(x)}$.

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה f. פרטו חישוביכם.

ב. מצאו את התמונה של הפונקציה f.

ג) ידוע כי $[f(x)]^{4\sin^2(x)}+[f(x)]^{4\cos^2(x)}=10$. מצאו את ערכי $\sin(x)$ האפשריים.

פתרון: א. תחום ההגדרה נקבע לפי המכנה. לכן, נדרוש שהמכנה יהיה שונה מ-0, כלומר נדרש שיתקיים: $\cos(x) \neq 1 \wedge \cos(x) \neq -1$. אם כן, תחום ההגדרה שיתקבל הינו:

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{y | y = \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$$

ב. נשים לב: $f(x) = \frac{\sin^2(x)[1-\cos(x)] + \sin^2(x)[1+\cos(x)]}{1^2 - \cos^2(x)} = \frac{2\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 2$, כלומר קיבלנו שהפונקציה הינה קבועה ומתקיים לכל x בתחום ההגדרה: $\mathrm{Im}[f] = \{2\}$.

ג. כיוון שהפונקציה הינה קבועה (לכל x בתחום ההגדרה כלומר $\sin(x) \neq 0$) נקבל:

$$[f(x)]^{4\sin^2(x)} + [f(x)]^{4\cos^2(x)} \Rightarrow 2^{4\sin^2(x)} + 2^{4\cos^2(x)} \Rightarrow 16^{\sin^2(x)} + 16^{\cos^2(x)}$$

$$\Rightarrow 16^{\sin^2(x)} + 16^{1-\sin^2(x)} \Rightarrow 16^{\sin^2(x)} + \frac{16}{16^{\sin^2(x)}}$$

ולכן, נסמן $t = 16^{\sin^2(x)}$ ונפתור. נקבל: $t + \frac{16}{t} = 10 \Rightarrow t = 2 \vee t = 8$ כלומר:

$$16^{\sin^2(x)} = 2 \vee 16^{\sin^2(x)} = 8 \Rightarrow 2^{4\sin^2(x)} = 2^1 \vee 2^{4\sin^2(x)} = 2^3$$

$$\Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{4} \vee \sin^2(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin(x) \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

שימו לב שכל הערכים שהתקבלו שייכים לתחום ההגדרה!