פתרון מבחן סיווג (19.08.2022)

1. נתונה הפונק' : $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

א) האם הפונק' זוגית / אי-זוגית / לא זוגית ולא אי-זוגית? הסבירו.

ב) הוכיחו / הפריכו: הפונק' f היא על.

ג) הוכיחו: אם x_1 ו- x_2 הם הופכיים, אז התמונות שלהם שוות. מה ניתן להסיק מכך על החד-חד ערכיות של f?

ד) האם הפונקציה f הפיכה? הסבירו.

פתרון: א. הפונקציה הינה אי זוגית, כיוון שמתקיים:

$$f(-x)=\frac{-x}{1+(-x)^2}=-\frac{x}{1+x^2}=-f(x)$$

ב. הפונקציה אינה על. נראה כי קיים איבר בטווח שאין לו מקור בתחום (למשל האיבר y=1):

$$f(x)=y\Leftrightarrow\frac{x}{1+x^2}=1\Leftrightarrow x^2-x+1=0$$

פתרונות המשוואה שלעיל אינם שייכים לקבוצת המספרים הממשיים, ולכן אין פתרון בתחום כלומר לאיבר y=1 מהטווח אין מקור והפונקציה אינה על.

ג. למעשה, יש להראות: $x_2=\frac{1}{x_1}\to f(x_2)=f(x_1)$. מתקיים: $f(x_1)=\frac{x_1}{1+x_1^2}$ ובנוסף מתקיים:

$$f(x_2)=\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{\frac{1}{x_1}}{1+\frac{1}{x_1^2}}=\frac{\frac{1}{x_1}}{\frac{1+x_1^2}{x_1^2}}=\frac{x_1}{1+x_1^2}=f(x_1)$$

כעת, ניתן להסיק שהפונקציה f אינה חח"ע, עקב העובדה שלאיברים הופכיים (שונים זה מזה למעט ±1) מהתחום יש תמונות שוות.

ד. הפונקציה אינה חח"ע ואינה על ולכן בהכרח אינה הפיכה.

2. א) הראו כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים: $(\bar{z})^2=\overline{(z^2)}$.

ב) נתונה המשוואה הבאה: $z^3-7z^2+bz-25=0$ כאשר $b\in\mathbb{R}$.

ידוע בנוסף כי $z_0=1-2i$ הינו שורש של המשוואה.

1. מצאו את ערך הפרמטר b.
2. הוכיחו כי גם $\bar{z_0}$ הינו פתרון של המשוואה.

פתרון: א. נסמן $z=x+iy, x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$. לכן: $\bar{z}=x-iy$. כעת, מתקיים:

$$(\bar{z})^2=(x-iy)^2=x^2-y^2-2xyi=\overline{x^2-y^2+2xyi}=\overline{(x+iy)^2}=\overline{(z^2)}$$

וכן:

$$(\bar{z})^3=(x-iy)^3=x^3-3xy^2-i(3x^2y-y^3)=$$
$$=\overline{x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)}=\overline{(x+iy)^3}=\overline{(z^3)}$$

ב. 1. נציב ונקבל: $(1-2i)^3-7(1-2i)^2+b(1-2i)-25=0$ ולאחר פיתוח נקבל:

$$b-15+i(30-2b)=0\Leftrightarrow b=15$$

2. ניתן להציב את הערך במשוואה ולהראות שוויון, אך נשים לב כי קיבלנו פולינום שמקדמיו ממשיים, ולפי משפט שלמדנו אם לפולינום מקדמים ממשיים בלבד, אזי שאם x הוא שורש של המשוואה, גם הצמוד שלו $\bar{x}$ הינו שורש של המשוואה, ולכן $\overline{z_0}$ הינו שורש של המשוואה.

3. נתון כי מתקיים : $\tan(x)+\frac{1}{\cos(x)}=\frac{3}{2}$

א) <u>מצאו</u> את תחום ההגדרה של המשוואה.

ב) <u>חשבו</u> את הערכים האפשריים של $\sin(x)$.

פתרון: א. תחום ההגדרה הינו $\cos(x)\neq 0$, לכן: $x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, כלומר סה"כ תחום ההגדרה של המשוואה: $x\in\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+\pi k|k\in\mathbb{Z}\}$.

ב. נפתור את המשוואה: $\tan(x)+\frac{1}{\cos(x)}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow \sin(x)+1=\frac{3}{2}\cos(x)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow [\sin(x)+1]^2=\frac{9}{4}[\cos(x)]^2\Leftrightarrow \sin^2(x)+2\sin(x)+1=\frac{9}{4}(1-\sin^2(x))\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{4}\sin^2(x)+2\sin(x)-\frac{5}{4}=0\Leftrightarrow \sin(x)=\frac{5}{13}\vee \sin(x)=-1$$

כעת, לאחר חיתוך עם תחום הגדרה נקבל כי $\sin(x)=\frac{5}{13}$.

4. א) <u>הוכיחו</u>: בכל סדרת מספרים $a_1,a_2,\cdots,a_n$ <u>לפחות אחד</u> האיברים גדול או שווה <u>לממוצע שלהם</u>.

ב) ללא קשר לסעיף קודם, <u>פתרו</u> את אי-השוויון הבא: $\log_{|x|}(5)\geq\log_5(x)$.

פתרון: א. נניח בשלילה כי כל המספרים בסדרה קטנים ממש מהממוצע שלהם, כלומר מתקיים: $s:=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, $\forall 1\leq k\leq n: a_k<s$. לכן:

$$s=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\overset{(*)}{<}\frac{1}{n}(s+s+\cdots+s)=\frac{1}{n}(ns)=s$$

כאשר אי השוויון המסומן בכוכבית נובע מההנחה שביצענו. סה"כ קיבלנו $s<s$ וזו סתירה!

לכן, בכל סדרת מספרים, לפחות אחד מהם גדול או שווה לממוצע שלהם. מ.ש.ל.

ב. ראשית נחשב תחום הגדרה. אגף ימין- תוכן הלוג חיובי ולכן: $x>0$. אגף שמאל- בסיס הלוג חיובי ושונה מ-1 ולכן: $|x|>0\wedge|x|\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0\wedge x\neq\pm 1$. נדרוש חיתוך של תחומי ההגדרה ונקבל שתחום ההגדרה הכולל: $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$.

כעת, לפתרון אי השוויון. ראשית נשים לב, שלפי תחום ההגדרה ניתן "להוריד" את הערך המוחלט (חשבו למה). נפתור: $\log_x(5)\geq\log_5(x)\Leftrightarrow\frac{\log_5(5)}{\log_5(x)}\geq\log_5(x)\Leftrightarrow\frac{1}{\log_5(x)}\geq\log_5(x)$

נסמן $t=\log_5(x)$ ונקבל: $\frac{1}{t}\geq t$. נפתור ע"י הפרדה למקרים:

עבור $t\geq 0$: נכפול ב-t ונקבל:

$$1\geq t^2\Leftrightarrow 1-t^2\geq 0\Leftrightarrow(1-t)(1+t)\geq 0\Leftrightarrow -1\leq t\leq 1$$

נחתוך עם התנאי ונקבל סה"כ $0\leq t\leq 1$.

עבור $t<0$: נכפול ב-t ונקבל:

$$1\leq t^2\Leftrightarrow t^2-1\geq 0\Leftrightarrow(t-1)(t+1)\geq 0\Leftrightarrow -1\geq t\ \vee\ t\leq 1$$

נחתוך עם התנאי ונקבל סה"כ $t\leq -1$.

נחזור למונחי x ונקבל: $\log_5(x)\leq -1\ \vee 0\leq\log_5(x)\leq 1$ ונעביר את כל הקבועים ללוגריתם עם בסיס 5: $\log_5(x)\leq\log_5(\frac{1}{5})\ \vee\log_5(1)\leq\log_5(x)\leq\log_5(5)$ ומכיוון ש-5>1 נקבל:

$x<\frac{1}{5}\ \vee 1\leq x\leq 5$. ולאחר חיתוך עם תחום ההגדרה, נקבל כי קבוצת הפתרונות:

$$x\in\left(0,\frac{1}{5}\right]\cup(1,5]$$

5. א) <u>הוכיחו</u>: מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$ היא 4^n.

ב) מהו מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל $2n$? <u>הסבירו</u>.

תזכורת- הבינום של ניוטון: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$

ג) <u>הוכיחו</u>: $4^n=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$

ד) <u>הסבירו</u> ע"י טיעון קומבינטורי, מדוע השוויון מסעיף ג' מתקיים.

פתרון: א. למדנו בכיתה שמס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n הוא 2^n ולכן, עבור קבוצה בגודל $2n$ מספר תתי הקבוצות יהיה $2^{2n}=4^n$.

ב. על מנת ליצור תת קבוצה בגודל k, עלינו לבחור מתוך $2n$ האיברים בקבוצה, k איברים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר (חשבו למה). לכן, סה"כ מס' תתי הקבוצות בגודל k הינו $\binom{2n}{k}$.

ג. נעזר בנוסחת הבינום של ניוטון, רק שכעת נציב במקום n את הערך $2n$ וכן נציב $x=y=1$. נקבל:

$$(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}1^k1^{2n-k}\Leftrightarrow 2^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}*1*1\Leftrightarrow 4^n=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}.$$

ד. לפי סעיף א', אגף שמאל הוא מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$. בנוסף, ניתן להגיד כי מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$, הוא סכום כל הקבוצות בגודל $0,1,2,\dots,2n$, כלומר סכום כל הקבוצות בגודל 0 (קבוצה ריקה), בגודל 1 (קבוצות המכילות איבר אחד בלבד) וכן הלאה עד לקבוצה בגודל $2n$ (הקבוצה עצמה). לפי סעיף ב', מס' תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל $2n$ הוא $\binom{2n}{k}$ והדבר נכון לכל $k\in\{0,1,\dots,2n\}$ ולכן, מעיקרון החיבור, מס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$ יהיה $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$. סה"כ מצאנו 2 ביטויים למס' תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $2n$ ומכך הם שווים. מ.ש.ל.

6. א) <u>הוכיחו</u> כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$.

ב) <u>חשבו</u> את ערך הביטוי הבא: $15^2-16^2+17^2-18^2+\cdots-50^2+51^2$.

פתרון: א. נשים לב כי אגף שמאל תמיד נגמר בגורם אי זוגי. ניתן להוכיח ע"י אינדוקציה, אך נראה דרך חלופית. נזכיר ראשית כי ראינו שמתקיים: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. כעת, נשים לב כי את הביטוי המקורי באגף שמאל ניתן לרשום בצורה הבאה: $1^2-2^2+3^2-\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2=$

$$=1^2+2^2+\cdots+(2n+1)^2-2*(2^2+4^2+\cdots+(2n)^2)=$$

$$=\sum_{k=1}^{2n+1}k^2-2\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{2n+1}k^2-8\sum_{k=1}^{n}k^2=$$

$$=\frac{(2n+1)(2n+2)(4n+3)}{6}-8\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$

$$=\frac{2(n+1)(2n+1)}{6}[4n+3-4n]=(n+1)(2n+1)$$

כפי שנדרשנו. נשאיר לקוראים להצדיק את המעברים האלגבריים.

ב. למען נוחות, נסמן: $p(n)=1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2$. כעת, נדרש לחשב את הביטוי הבא (במונחי הסימון החדש): $p(25)-p(7)+15^2$ (חשבו למה).

לפי סעיף א', נקבל: $p(25)-p(7)+15^2=26\cdot51-8\cdot15+225=1431$.

לכן, סה"כ: $15^2-16^2+17^2-18^2+\cdots-50^2+51^2=1431$.