

בחינת סיווג במתמטיקה 26.9.2017

פתרונות

1. סדרת מספרים ממשיים $\{a_n\}$ נקראת מונוטונית עולה אם לכל $1 \leq n$ מתקיים $a_n \leq a_{n+1}$.
האם הסדרה $\{a_n = n - \sqrt{n}\}$ היא מונוטונית עולה? הוכיחו תשובתכם.

פתרון:

הסדרה $\{a_n\}$ היא אכן מונוטונית עולה. נבדוק באופן ישיר כי תנאי המונוטוניות מתקיים עבור סדרה זו.
צריך להראות כי:

$$n - \sqrt{n} \leq n + 1 - \sqrt{n+1}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$. אי השוויון הזה שקול לאי השוויון

$$\sqrt{n+1} \leq \sqrt{n} + 1$$

וכדי להוכיח (כדרוש) אי שוויון זה, נעלה את שני האגפים בריבוע ונקבל:

$$n+1 \leq (\sqrt{n}+1)^2 = n+1+2\sqrt{n}$$

אי שוויון שבו אגף ימין מתקבל מאגף שמאל על ידי חיבור של מספר חיובי $(2\sqrt{n})$, כך שאי השוויון המבוקש הוא ברור מאליו ולכן גם קודמו תקף ובכך מוכחת המונוטוניות העולה של הסדרה הנתונה.

2. נניח כי $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{10}$ כאשר $p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_{10}$ הם מספרים ראשוניים. מהו מספר המספרים השלמים z ($1 \leq z \leq x$) כך ש- x מתחלק ב- z ללא שארית, כלומר $\frac{x}{z}$ הוא מספר שלם?

פתרון:

מספר z מחלק את x אם ורק אם הוא מכפלה של גורמים ראשוניים של x , או ש- $z=1$. לפיכך המכפלה של אברי כל תת קבוצה של גורמים ראשוניים אלה (לרבות הקבוצה הריקה המתאימה למחלק $z=1$) מחלקת את x . מאחר שלפי הנתון כל הגורמים הראשוניים של x שונים זה מזה אין ל- x מחלקים אחרים. כפועל יוצא, מספר המחלקים המבוקש של x הוא כמספר כל תת הקבוצות של עשרת הגורמים הראשוניים של x . לפי עקרון המכפלה הקומבינטורי, מספר האפשרויות לבנות תת קבוצה כלשהי מקבוצה בת עשרה איברים הוא

$$2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$$

כי לכל איבר יש שתי אפשרויות: להשתייך לתת הקבוצה או למשלים שלה. לפיכך, המספר הכולל של תת הקבוצות (לרבות הקבוצה הריקה והקבוצה כולה) של קבוצה בת עשרה איברים הוא $2^{10} = 1024$ וזהו כאמור מספר המחלקים המבוקש של x .

3. הוכיחו כי לכל $x, y > 0$ מתקיים $(\log_2 x)(\log_2 y) \leq \frac{(\log_2(xy))^2}{2}$. מתי מתקיים שוויון?

פתרון:

הפורמאט של אי השוויון המבוקש מזמין שימוש באי שוויון הממוצעים. אך כדי להשתמש בו, יש לוודא תחילה שבלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי

$$\log_2 x, \log_2 y > 0$$

ואכן ניתן להניח זאת, כי צד ימין של האי שוויון הוא בכל מקרה חיובי (ריבוע של מספר) ולכן אם צד שמאל הוא שלילי אז האי שוויון מתקיים באופן טריביאלי. המקרה שבו שני גורמי המכפלה הם שלילים וצד שמאל של האי שוויון נותר חיובי, מחזיר אותנו למקרה שבו שני הגורמים חיוביים.

נשתמש אפוא באי שוויון הממוצעים שלפיו:

$$\sqrt{(\log_2 x)(\log_2 y)} \leq \frac{\log_2 x + \log_2 y}{2} = \frac{\log_2(xy)}{2}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מההגדרה של פונקצית הלוגריתם שלפיה הלוגריתם של מכפלה הוא סכום הלוגריתמים. נעלה בריבוע את השני אגפי האי שוויון ונקבל:

$$(\log_2 x)(\log_2 y) \leq \frac{(\log_2(xy))^2}{4} \leq \frac{(\log_2(xy))^2}{2}$$

כפי שרצינו. כדי לקבל שוויון, עלינו לדרוש שוויון באי שוויון הממוצעים, וגם שוויון באי שוויון האחרון. כלומר:

$$\log_2 x = \log_2 y$$

וגם

$$\frac{(\log_2(xy))^2}{4} = \frac{(\log_2(xy))^2}{2}$$

וזה קורה אם ורק אם $\log_2 x = \log_2 y = 0$, כלומר $x = y = 1$.

4. היחס x בין אורך מלבן (אורך הצלע הארוכה שלו) לבין רוחבו מקיים את המשוואה: $x^2 = 6(1 + x^2)^{-1}$. מהו קוסינוס הזווית בין אלכסון המלבן לצלע הארוכה שלו?

פתרון:

תחילה נפתור את המשוואה המוצגת בשאלה. נכפיל את שני האגפים ב- $(1 + x^2)$ ונציב $t = x^2$. קיבלנו:

$$t^2 + t = 6$$

הפתרונות של המשוואות האלו:

$$t = -3 \text{ or } t = 2$$

אבל מכיוון ש- $t \geq 0$ נקבל כי:

$$t = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

נסמן את אורך הצלע הקצרה במלבן באות a . מנתון השאלה, ניתן להסיק כי אורך הצלע הארוכה שלו הוא $\sqrt{2}a$ וממשפט פיתגורס אורך האלכסון של המלבן הינו $\sqrt{3}a$. מכאן, הקוסינוס המבוקש של הזווית בין אלכסון המלבן לצלע הארוכה שלו הוא:

$$\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

כנדרש.

5. הוכיחו כי לכל מספר טבעי $1 \leq n$ מתקיים השוויון:

$$\frac{6(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)}{n(n+1)(2n+1)} = 1$$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה את הטענה השקולה:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

נתחיל מבסיס האינדוקציה. עבור $n = 1$ מתקיים:

$$1^2 = \frac{1(2)(3)}{6}$$

וזה נכון באופן טריביאלי.

כעת נראה את צעד האינדוקציה. נניח כי הטענה נכונה עבור n ונוכיח את נכונותה עבור $n + 1$. אכן:

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 &= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{(n + 1)}{6} (n(2n + 1) + 6(n + 1)) = \frac{(n + 1)}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(2(n + 1) + 1)}{6} \end{aligned}$$

כאשר השוויון הראשון נובע מהנחת האינדוקציה והשאר מפישוטים אלגבריים פשוטים. הוכחנו את צעד האינדוקציה ולכן הוכחנו את נכונות הטענה כולה.

6. מצאו את כל הפתרונות (מרוכבים / ממשיים / מדומים) של המשוואה $z^2 + 10|z| - 24 = 0$.

פתרון:

הצבת $z = a + ib$ במשוואה ופיתוח אלגברי פשוט מובילים למשוואה:

$$a^2 - b^2 + 2abi = 24 - 10\sqrt{a^2 + b^2}$$

צד ימין של השוויון הנ"ל הינו מספר ממשי, ולכן גם צד שמאל חייב להיות. מכאן ניתן להסיק:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ or } b = 0$$

המקרה $a = 0 = b$ אינו רלבנטי לעניינינו כי $z = 0$ אינו מקיים את המשוואה הנתונה.

לפיכך נותר לבדוק שני מקרים:

א) $a = 0, b \neq 0$: במקרה זה המשוואה הופכת להיות:

$$-b^2 = 24 - 10|b|$$

נבחין כי משוואה זו היא סימטרית ב- b סביב 0 (כלומר, אם b הוא פתרון של המשוואה אז גם $-b$ פתרון.

לכן ניתן להניח כי $b > 0$. הפתרונות החיוביים המתקבלים במקרה זה הם 4 ו-6 וכשמכניסים את הסימטריה האמורה מקבלים:

$$b = \pm 6, \pm 4$$

ב) $a \neq 0, b = 0$: במקרה זה המשוואה הופכת להיות:

$$a^2 = 24 - 10|a|$$

גם כאן, המשוואה סימטרית ב- a סביב 0 ולכן אפשר לחפש פתרונות חיוביים של המשוואה ללא ערך מוחלט. הפתרונות של משוואה ריבועית זו הם 2 ו-12,

ורק אחד מהם חיובי כך שמטעמי הסימטריה ב- a של המשוואה המקורית (עם הערך המוחלט), הפתרונות הם $a = \pm 2$

סיכומו של דבר: ששת המספרים הבאים (2 ממשיים ו-4 דמיוניים):

$$z = \pm 2, \quad \pm 6i, \quad \pm 4i$$

מהווים את כל הפתרונות של המשוואה הנתונה.

7. (א) האם אפשר לחשב את $\sin(3x)$ באופן חד משמעי בהינתן $\sin(x)$?

(ב) האם אפשר לחשב את $\sin(x)$ באופן חד משמעי בהינתן $\sin(3x)$?

בכל אחת משתי השאלות, אם התשובה היא כן, מצאו נוסחה המבטאת את הגודל האחד באמצעות האחר, אם התשובה היא לא, הציגו הוכחה לכך.

תזכורת:

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)$$

פתרון:

א. התשובה חיובית – אפשר לחשב. נבחין תחילה כי ניתן לחשב את $\cos(x)$ בהינתן $\sin(x)$, פשוט בעזרת הנוסחה המפורסמת (השקולה למשפט פיתגורס, לא רק נובעת ממנו):

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

כעת, בעזרת הזהויות שהופיעו בתזכורת:

$$\sin(3x) = \sin(x + 2x) = \sin(x) \cos(2x) + \sin(2x) \cos(x)$$

ולכן, אם ניתן לחשב את $\cos(2x)$ ואת $\sin(2x)$ בעזרת $\cos(x)$ ו- $\sin(x)$ אז סיימנו. אכן ניתן לחשב אותם, שוב - בעזרת הזהויות הנתונות בתזכורת:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

ולכן ניתן לחשב את $\sin(3x)$ אם אנחנו יודעים את הערך של $\sin(x)$, כפי שנטען במענה לשאלה.

ב. בדרך כלל לא ניתן לחשב את $\sin(x)$ באופן חד משמעי בהינתן $\sin(3x)$. נראה זאת על ידי דוגמא:

נניח כי $\sin(3x) = 0$, אז מתקיים:

$$3x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ועבור (למשל) $k=0,1$, מקבלים בהתאמה $x = 0, \pi/3$

אבל $\sin(0) = 0 \neq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, ולכן לא ניתן לקבוע באופן חד משמעי מהו הערך של $\sin(x)$.