School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (01.07.2022)

1. מצאו את כל המספרים הממשיים שעבורם מתקיימים האי-שוויונים הבאים:

א. $\log_{10}\sqrt{x} \le \sqrt{\log_{10} x}$ (8 נקודות)

ב. $4^{x+1}+10^{x+2} \ge 25^x$ (9 נקודות)

פתרון: א. כדי שהביטויים יהיו מוגדרים, x וגם $\log_{10} x$ חייבים להיות חיוביים.

$\log\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log x \le \sqrt{\log x} \Leftrightarrow \log x \le 2\sqrt{\log x} \Leftrightarrow \sqrt{\log x} \le 2 \Leftrightarrow \log x \le 4 \Leftrightarrow x \le 10^4$ כך

שקבוצת המספרים המבוקשת היא הקטע $(0,10^4]$.

ב. נחלק את שני האגפים ב- 25^x ונקבל: $4\{(\frac{2}{5})^x\}^2+100(\frac{2}{5})^x \ge 1$ - אי שוויון ריבועי ב- 2^x

שנסמנו ב- y ונקבל: $4y^2+100y-1\ge0$, $4(y^2+25y-1)\ge 0 \Leftrightarrow (y+5)^2-25-1\ge0$ כך שאי

השוויון המקורי שקול ל- $(y+5)^2 \ge 26$ ומאחר ש- $0<y$ זה שקול לכך ש- $y \ge \sqrt{26}-5$

וכשנתרגם חזרה x נקבל $(\frac{2}{5})^x \ge \sqrt{26}-1$ השקול ל- $0\le x\le\frac{\log(\sqrt{26}-5)}{\log 5-\log 2}$ עם אותו בסיס לוג

במונה ובמכנה. אי השוויון התהפך כי $0>\log(\frac{2}{5})$ (כאשר בסיס הלוג גדול מ-1).

2. מצאו את כל המספרים הממשיים בקטע $[0,2\pi]$ המקיימים את המשוואות

הטריגונומטריות הבאות: **א.** $\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) = 0$ (9 נקודות)

ב. $8\sin^5(x)-22\sin^3(x)+5\sin(x)=0$ (8 נקודות)

לעזרתכם: $\cos(x\pm y)=\cos x\cdot\cos y\mp\sin x\cdot\sin y$ $\quad\sin(x\pm y)=\sin x\cdot\cos y\pm\cos x\cdot\sin y$

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. ניזכר תחילה ש- $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (כי זה היחס בין צלע ואלכסון של ריבוע).

$$\sqrt{3}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=\sqrt{3}\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})=\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}) \Rightarrow$$
$$(\sqrt{3}+1)\sin\frac{x}{2}=(\sqrt{3}-1)\cos\frac{x}{2} \Rightarrow tg\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

נסמן ב- s את $\sin\frac{x}{2}$ וב- c את $\cos\frac{x}{2}$ ונקבל $\frac{s}{c}=\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ והעלאה בריבוע ופישוט

נותנים $c^2=(\cos\frac{x}{2})^2=\frac{1}{1+(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1})^2}$. נותר למצוא את את ערכי x בהינתן $\cos\frac{x}{2}$.

ב. נסמן את $\sin x$ ב- s:

$$s(8(s^2)^2-22s^2+5)=0 \Rightarrow s=0\ (x=0,\pi,2\pi)\ or\ 8(s^2)^2-22s^2+5=0$$

פתרון המשוואה הריבועית ב- s^2 הוא $s^2=\frac{22\pm\sqrt{22^2-160}}{16}=\frac{22\pm\sqrt{324}}{16}=\frac{22\pm18}{16}=\frac{5}{2}\ or\ \frac{1}{4}$

מאחר ש- $1\geq s^2$ רק הפתרון רבע הוא רלוונטי ולכן

$s=\sin x=\pm\frac{1}{2}\ (x=\frac{\pi}{6}=30^\circ,\frac{5}{6}\pi=150^\circ,\frac{7}{6}\pi=210^\circ,\frac{11}{6}\pi=330)^\circ$ ואלה, בנוסף ל-0 שמצאנו

קודם, הם פתרונות המשוואה הנתונה.

3. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^5+z^3=2z$

פתרון:

$$z^5+z^3=2z \Leftrightarrow z((z^2)^2+z^2-2)=0 \Leftrightarrow z=0\ or\ (z^2)^2+z^2-2=(z^2-1)(z^2+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$z^2=1\ (z=\pm1)\ or\ z^2=2\ (z=\pm\sqrt{2})$$

לסיכום: חמשת הפתרונות של המשוואה הפולינומיאלית הנתונה ממעלה 5 הם
$0,1,-1,+\sqrt{2},-\sqrt{2}$.

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

4. א. הוכיחו שלכל n טבעי אי זוגי 4^n+7^n מתחלק ב11 ללא שארית (10 נקודות)

ב. האם קיים n טבעי עבורו הביטוי שבסעיף א' מתחלק ב-44 ללא שארית? נמקו. (7 נקודות)

פתרון: א. ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה, אך בחרנו להציג הוכחה אחרת.

$4^n+7^n=(4+7)(4^{n-1}-4^{n-2}\cdot 7+4^{n-3}\cdot 7^2-...-4\cdot 7^{n-2}+7^{n-1})$ הסכום בסוגריים השניים הוא עם סימנים מתחלפים לסרוגין עם סימן חיובי בחזקות הזוגיות של 7 ולכן השוויון מתקיים כאשר n איזוגי, כך שהביטוי הנתון הוא כפולה של 4+7=11 ולכן מתחלק ב-11 ללא שארית.

ב. הביטוי הנתון הוא סכום של מספר זוגי (4^n) ואיזוגי ולכן הוא עצמו איזוגי ואינו מתחלק ב-2 לשום n טבעי ולכן גם אין n טבעי שעבורו מתחלק הביטוי ב-44 ללא שארית.

5. הפונקציה $f:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=2^{|x|}-2^{-|x|}$.

א. הוכיחו ש- f היא פונקציה זוגית, כלומר כי לכל x, $f(-x)=f(x)$. (8 נקודות)

ב. מצאו את כל ערכי x שעבורם $f(x)\ge\frac{15}{4}$ (9 נקודות)

פתרון: א. f היא פונקציה זוגית כי $|-x|=|x|$.

ב. נסמן ב- y את $2^{|x|}$ ונשים לב ש- y חיובי. =

$$y-\frac{1}{y}\ge\frac{15}{4}\Leftrightarrow y^2-\frac{15}{4}y-1\ge 0\Leftrightarrow (y-\frac{15}{8})^2-(\frac{15}{8})^2-1\ge 0\Leftrightarrow y\ge\frac{15}{8}+\sqrt{1+(\frac{15}{8})^2}=\frac{15}{8}+\frac{\sqrt{289}}{8}=4$$

$y=2^{|x|}\ge 4\Leftrightarrow |x|\ge 2\Leftrightarrow x\ge 2\ or\ x\le -2$. בסיכום: הפונקציה מקיימת את אי השוויון על $\mathcal{R}\setminus(-2,+2)$.

קריית האוניברסיטה, ת״ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

6. יהיו n,k מספרים טבעיים, $n \geq k \geq 2$.

בכיתה $n+2$ תלמידות ובתוכן גם דנה ורונית. ועד כיתה מורכב מ- k תלמידות.

א. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד כיתה הכולל את דנה ורונית? (4 נקודות)

ב. בכמה דרכים ניתן לבחור ועד כיתה הכולל את דנה אבל לא כולל את רונית? (4 נקודות)

ג. בכמה דרכים – ועד כיתה שאינו כולל את דנה ולא את רונית? (4 נקודות)

ד. הוכיחו (אלגברית) את הזהות $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$ והסבירו את הקשר בין זהות זו לבין בחירת ועד הכיתה תחת האילוצים שבסעיפים הקודמים. (5 נקודות)

פתרון: א. לבחירה זו של הועד יש לצרף לדנה ורונית $k-2$ תלמידות מתוך n ולכך יש $\binom{n}{k-2}$ אפשרויות.

ב. לבחירה כזו יש לצרף לדנה $k-1$ חברות ועד מתוך ה-n שאינן דנה או רונית ולכך יש $\binom{n}{k-1}$ דרכים.

ג. בבחירה כזאת כל k חברות הועד נבחרות מ-n תלמידות הכיתה שאינן דנה או רונית ולכך יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות.

ד. את קבוצת כל ועדי הכיתה האפשריים ניתן להציג כאיחוד של 4 קבוצות זרות, 3 בהתאם לאילוצי הבחירה בשלושת הסעיפים הראשונים ועוד אחת בחילוף דנה ורונית בסעיף ב'. אגף שמאל מבטא את מספר הועדים הכולל והמחוברים באגף ימין מבטאים, כמוכח, את גודלי תת הקבוצות האמורות.