School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (07.05.2021)

1. תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. רשמו במחברת שתי דיאגרמות ון עבורן.

א. באחת הדיאגרמות סמנו את הקבוצה $D:=(A\cup B)\setminus C$ (2 נקודות)

ב. בדיאגרמה האחרת סמנו את הקבוצה $E:=A\cup(B\setminus C)$ (2 נקודות)

ג. הוכיחו (פורמלית) כי $D\subseteq E$ (7 נקודות)

ד. האם תמיד גם $E\subseteq D$? אם לא תמיד, אז באילו תנאים כן ? (6 נקודות)

פתרון: נניח לקוראים את הסעיפים א' ו-ב'.

ג. $D:=(A\cup B)\setminus C=(A\cup B)\cap C^c=(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)\subseteq A\cup(B\cap C^c)=A\cup(B\setminus C):=E$

הקוראים מתבקשים להצדיק לעצמם את השוויונות ואת ההכלות שלעיל.

ד. בדרך כלל התשובה היא לא, כי נקודות שהן ב- A וגם ב- C הן ב- E אבל אינן ב- D. אבל אם $A\cap C=\varnothing$ אז גם $E\subseteq D$ כך שבעצם (במקרה זה) $E=D$ כי

$$E:=A\cup(B\setminus C)=A\cup(B\cap C^c)=[(A\cap C)\cup(A\cap C^c)]\cup(B\cap C^c)=\varnothing\cup(A\setminus C)\cup(B\setminus C):=D$$

2. הסדרה $a_1,a_2,a_3,\ldots$ מוגדרת על ידי $a_n=n\cdot n!$ (עבור $1\le n$). נגדיר $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ (סכום n האיברים הראשונים בסדרה הנתונה). הוכיחו כי $S_n<a_{n+1}$ לכל n טבעי.

פתרון: ניתן להוכיח את הטענה באינדוקציה, אך למי שמבחין בכך שבסדרה הנתונה כל איבר גדול מקודמו (הסדרה היא עולה ממש) יש הוכחה יותר פשוטה: אכן, כל איבר בסדרה הנתונה גדול מקודמו (בדקו) ולא כל שכן, האיבר האחרון a_n בסכום S_n גדול מכל אחד מקודמיו, לפיכך

$$S_n<na_n=n(n\cdot n!)<(n+1)[(n+1)n!]=(n+1)(n+1)!=a_{n+1}$$

מ.ש.ל.

3. קבעו עבור אלו ערכי x (ממשיים) מוגדר הביטוי $\log_x|x^2-1|$ (כמספר ממשי) ומצאו את כל ערכי x שעבורם ביטוי זה הוא שלילי, כלומר קטן מ-0 .

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: כדי שהביטוי יהיה בעל ערכים ממשיים חייב בסיס הלוגריתם x להיות מספר חיובי, ומאחר שלוגריתם של 0 אינו מוגדר מתחייב גם $x \neq 1$, כך שתחום ההגדרה של הביטוי הוא הקבוצה $(0,\infty)\setminus\{1\}$.

יהי $y = y(x) := \log_x |x^2-1|$ השקול ל- $x^y = |x^2-1|$. עלינו למצוא את כל ערכי x (בתחום ההגדרה של $y = y(x)$) שעבורם $0 > y$.

כאשר $0<x<1$, $|x^2-1| = 1-x^2 < 1$ ולעומת זאת, אם $0 > y$, $x^y = \frac{1}{x^{-y}} > 1$ כך שבקטע $(0,1)$ אין ערכי x שעבורם y שלילי.

לבדיקת התחום $(1,\infty)$ בחרנו בדרך אחרת:

מאחר ש- $\log_x 1 = 0$ אי השוויון הנתון שקול ל- $\log_x |1-x^2| < \log_x 1$ השקול (עבור $1<x$) ל-:

$$|x^2-1| = x^2-1 < 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 < 2 \;\Leftrightarrow\; -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

סיכומו של דבר: קבוצת הערכים המבוקשת היא הקטע הפתוח $(1,\sqrt{2})$.

4. א. תהי $\pi \le \alpha \le 2\pi$ זווית כך ש- $tg\,\alpha = 3$, מהו $\sin\alpha$? (9 נקודות)

ב. השתמשו בנוסחאות סינוס וקוסינוס של זווית כפולה כדי לבטא את $tg\,2x$ באמצעות (כפונקציה של) $tg\,x$. (8 נקודות)

פתרון: א. נקבע תחילה את הסימן של $\sin\alpha$. הטנגנס הוא חיובי כאשר הסינוס והקוסינוס שווי סימן כי הוא המנה שלהם. בתחום הנתון של α זה קורה רק כאשר α ברביע השלישי, כלומר $\pi<\alpha<3\pi/2$, שבו שניהם שליליים, ובפרט הסינוס המבוקש הוא בעל ערך שלילי. נחשב עתה את ערכו:

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = 3 \;\Rightarrow\; \sin^2\alpha = 9(1-\sin^2\alpha) \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

ומאחר שכבר קבענו שהסינוס המבוקש הוא שלילי, ערכו הוא $-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

ב.
$$tg(2x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2}{\frac{1}{tgx} - tgx} = \frac{2tgx}{1-tg^2x}$$

בדקו כי במהלך החישוב לא בוצע חילוק לא לגיטימי ב-0.

5. א. הוכיחו באופן אלגברי טהור, ללא שיקולים גיאומטריים, כי לכל שני מספרים מרוכבים z ו-w, $|z+w| \le |z| + |w|$ (12נקודות).

ב. הסבירו בקצרה מדוע נקרא אי שוויון זה בשם אי שוויון המשולש (5 נקודות).

3/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. שני אגפי אי השוויון אי שליליים, כך שהוא שקול לאי שוויון בין ריבועיהם, שאותו נוכיח.

$$|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})=z\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}+(z\cdot\bar{w}+\bar{z}\cdot w)=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\cdot\bar{w})\le$$
$$|z|^2+|w|^2+2|z\cdot\bar{w}|=|z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|\bar{w}|=|z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|w|=(|z|+|w|)^2$$

הסבירו כל אחד מהשוויונות האלה וגם את אי השוויון היחיד המופיע ביניהם.

ב. במישור המרוכב, הנקודות 0 (הראשית), z , $z+w$ הן קדקודי משולש שאורכי צלעותיו הם $|z|, |w|, |z+w|$ (הצלע המחברת בין הקדקודים z ו- $z+w$ מקבילה לקטע $w \leftrightarrow 0$ ושווה לו באורכה). היוצא מתיאור גיאומטרי זה הוא שאי השוויון שהוכח בסעיף א' הינו ביטוי אלגברי לכך שסכום אורכי שתי צלעות במשולש גדול מאורך הצלע השלישית וזהו אי שוויון המשולש.

6. הוכיחו שבין כל 5 מספרים טבעיים (לאו דווקא שונים זה מזה) אפשר למצוא 3 שסכומם מתחלק ב-3.

פתרון: בחילוק מספר טבעי ב-3 ייתכנו שלוש שאריות שונות זו מזו: 0 (כאשר המספר המחולק הוא כפולה של 3), 1 ו-2. לא ייתכן כי כל חמשת המספרים יתנו שאריות שונות כי יש רק 3 כאלה ולכן לפחות אחת השאריות מתקבלת לפחות פעמיים (חשבו על השכנת חמישה כדורים בשלושה תאים). נבחין עתה בין שני מקרים. א. שלושה מהמספרים הם בעלי אותה שארית: במקרה זה סכום שלושת המספרים האלה מתחלק ב-3 כי סכום השאריות (השוות) הוא כפולה של 3 (שימו לב שהשתמשנו כאן בעובדה שצוינה ברמז ב' לשאלה זו). גם בניתוח מקרה ב' שלהלן נשתמש בעובדה יסודית זו).

ב. רק שניים מהמספרים הם בעלי אותה שארית ושלושת המספרים האחרים מתפזרים בין שתי השאריות האחרות (ואינם בעלי אותה שארית, כי את המצב הזה כיסינו במקרה א'). שלושת המספרים האלה מתפצלים גם הם לשניים שהם שווי שארית (השונה מזו של השניים הראשונים) ולאחד שהשארית שלו שונה משתי השאריות האחרות. כך שבמקרה זה אחת משלוש השאריות מתקבלת פעם אחת והשתיים האחרות מתקבלות כ"א פעמיים. נבחין עתה בין שלושה תת-מקרים לפי גודל השארית המתקבלת פעם אחת בלבד:

ב1. השארית 0 היא זו המתקבלת פעם אחת וכל אחת מהשאריות 1 ו-2 מתקבלת פעמיים: במקרה זה, הסכום של המספר עם השארית 0, אחד המספרים עם שארית 1 ואחד עם שארית 2 - מתחלק בשלוש.

ניתוח המקרים ב2 ו-ב3 דומה.

המקרים שמנינו מכסים את כל האפשרויות ובכל אחד מהם נמצאו שלושה מחמשת המספרים הנתונים שסכומם מתחלק ב-3.