School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (23.07.2021)

1. תהיינה A,B,C קבוצות.

הוכיחו (פורמלית) או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית והסבר) את הטענות הבאות:

א. $A\subseteq B\cap C$ **אם-ורק-אם** $A\subseteq B$ וגם $A\subseteq C$ (10 נקודות)

ב. $A\subseteq B\cup C$ **אם-ורק-אם** $A\subseteq B$ או $A\subseteq C$ (7 נקודות)

שימו לב: בכל סעיף יש שתי טענות, טענת **אם** וטענת **רק-אם**. יש להוכיח או להפריך כל אחת מהטענות.

פתרון: א. אם $A=\varnothing$ אין מה להוכיח כי הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה. נניח אם כן ש- $A\neq\varnothing$ ויהי $x\in A$. אם $x\in B$ וגם $x\in C$, אז $x\in B\cap C$ ופירושו של דבר: **אם** $A\subseteq B$ וגם $A\subseteq C$ אז $A\subseteq B\cap C$. ולהפך: אם $A\subseteq B\cap C$ אז כל איבר של A שייך ל- B וגם ל- C (כי החיתוך של שתי קבוצות הוא קבוצת כל האיברים השייכים לשתיהן) ופירושו של דבר כי $A\subseteq B$ וגם $A\subseteq C$ וזה מוכיח את טענת **רק אם**.

ב. **אם** A מוכלת ב- B או ב- C, אז כל איבר של A שייך לאחת מהן (או לשתיהן) כך שחלק מאברי A שייכים ל- B (אולי כולם, אולי אף אחד) וחלקם ל- C (אולי כולם, אולי אף אחד) ופירושו של דבר $A\subseteq B\cup C$. לעומת זאת, קבוצה A יכולה להיות מוכלת באיחוד של B ו- C **לא רק-אם** היא מוכלת בזו או בזו, לדוגמא: $A=\{0,1\},\ B=\{0\},\ C=\{1\}$. בדוגמא זו, לא רק ש- A אינה מוכלת באף אחת משתי הקבוצות האחרות, אלא שהיא מכילה כל אחת מהן, ובכל זאת היא מוכלת באיחודן (בעצם – שווה לו). כך שטענת **רק-אם** לא תקפה במקרה זה.

2. נתונה הפונקציה $f(x)=\log_3\left(1-\log_2\left|\dfrac{x}{x-1}\right|\right)$ על הישר הממשי.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה f? (6 נקודות)

ב. זהו וכתבו במפורש את הקבוצה $A=\{x\in\mathcal{R}:\ f(x)\ge 0\}$ (6 נקודות)

ג. זהו את הקבוצה $B=\{|x-2|:x\in A\}$ וסמנו אותה על ציר המספרים הממשיים (5 נקודות)

פתרון: א. ראשית, עקב הביטוי עם הלוגריתם על בסיס 2 שבהגדרת f, רואים מיד ש-0 ו-1 אינם שייכים לתחום ההגדרה של f. הלוגריתם (מה שלא יהיה הבסיס) מוגדר רק על המספרים החיוביים ולכן f מוגדרת אם-ורק-אם

$$1-\log_2\left|\frac{x}{x-1}\right|>0 \iff \left|\frac{x}{x-1}\right|<2 \iff -2<\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}<2 \iff -3<\frac{1}{x-1}<1$$

2/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

לניתוח אי השוויון האחרון נחלק את הישר לתחומים זרים ונבחן מה קורה לאי השוויון בכל תחום:

- הקרן החיובית $(0,\infty)$

כאשר $0<x<1$: $(x-1)^{-1}<0<1$ ולעומת זאת $-3<(x-1)^{-1}$ אם-ורק-אם $x\in(0,2/3)$

כאשר $1<x$: $-3<0<(x-1)^{-1}$ ולעומת זאת $(x-1)^{-1}<1$ אם-ורק-אם $x\in(2,\infty)$

- הקרן השלילית $(-\infty,0)$

על קרן זו הביטוי הנדון שלילי ועל כן קטן מ-1 וכמו כן הוא גדול מ 3- כי הוא אפילו גדול מ 1-.

לסיכום: תחום ההגדרה $D=D_f$ של הפונקציה f היא הקבוצה

$$D=D_f=(-\infty,0)\cup(0,\frac{2}{3})\cup(2,\infty)$$

ב. הלוגריתם של מספר חיובי על בסיס גדול מ-1 (למשל בסיס 3) הוא אי שלילי כאשר (ורק כאשר) המספר עצמו הוא לפחות 1, זאת אומרת:

$$\begin{aligned}A= &\{x: f(x)\ge 0\}=\{x:1-\log_2|\frac{x}{x-1}|\ge 1\}\cap D=\{x:\log_2|\frac{x}{x-1}|\le 0\}\cap D\\ &=\{x:|\frac{x}{x-1}|<1\}\cap D=\{x:-1<\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}<1\}\cap D\\ &=\{x:-2<\frac{1}{x-1}<0\}\cap D=(-\infty,\frac{1}{2})\cap(-\infty,1)\cap D=(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2})\end{aligned}$$

ג. בסעיף ב' מצאנו $A=(-\infty,0)\cup(0,1/2)$ ולפיכך

$$\begin{aligned}B&=\{|x-2|:x\in A\}=\{|x-2|:x<0\}\cup\{|x-2|:0<x<1/2\}=\\ &=\{x+2:x>0\}\cup\{2-x:0<x<1/2\}=(2,\infty)\cup(3/2,2)\\ &=(\frac{3}{2},\infty)\setminus\{2\}\end{aligned}$$

3. א. הציגו בצורה פולארית את המספרים המרוכבים הבאים: $1+\sqrt{3}i,\ 5+5i$

תזכורת: $\sin 0=0,\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\frac{\pi}{2}=1$ (6 נקודות)

ב. הציגו את המספר המרוכב $z=(1+\sqrt{3}i)^6(5+5i)^4$ בצורתו הקרטזית $z=x+iy$ (11 נקודות)

3/-

פתרון: א. הצגה פולארית של מספר מרוכב z היא $z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$:

$$1+\sqrt{3}\,i = 2(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$5+5i = 25\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{50}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

ב. כידוע, מבחינה גיאומטרית, פעולת הכפל במספר מרוכב z היא פעולת מתיחה (אם $|z|>1$) או כיווץ (אם $|z|<1$) של הרדיוס-וקטור (מהראשית לנקודה המייצגת את המספר המוכפל) וסיבובו במגמה החיובית (נגד כיוון השעון) בארגומנט של z ולפיכך: העלאה בחזקה מעלה את $|z|$ באותה חזקה ובד בבד מכפילה את הארגומנט שלו במעריך של החזקה. נותר רק לחשב:

$$(1+\sqrt{3}i)^6(5+5i)^4 = 2^6(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^6\cdot(\sqrt{50})^4(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^4 =$$

$$= 64\cdot 2500(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)\cdot(\cos\pi+i\sin\pi) = 160{,}000\cdot 1\cdot(-1) = -160.000$$

4. הוכיחו שהביטוי $3\sin^2(2x)+4\cos^6(x)+4\sin^6(x)$

הוא קבוע שאינו תלוי ב-x. מהו ערכו של קבוע זה?

פתרון: למען חיסכון בהקלדה, נסמן את פונקציית הסינוס ב-s ואת הקוסינוס ב-c .

כזכור, נוסחת הסינוס של זווית כפולה היא $\sin 2x=2\sin x\cos x=2s(x)c(x)$ ולפיכך:

$$3s^2(2x)+4c^6(x)+4s^6(x) = 12s^2(x)c^2(x)+4c^6(x)+4s^6(x) =$$

$$= 12s^2(x)(1-s^2(x))+4(1-s^2(x))^3 + 4s^6(x) = 12s^2(x)-12s^4(x)+4(1-3s^2(x)+3s^4(x)-s^6(x)) = 4$$

הסבר: השתמשנו במשפט פיתגורס $c^2(x)=1-s^2(x)$ כדי להציג את הביטוי באמצעות סינוס בלבד ולאחר מכן פיתחנו לסכום את $(1-s^2(x))^3$ וקבצנו איברים, לבסוף התקבל הקבוע 4.

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

5. א. הוכיחו שלכל מספר טבעי אי-זוגי n, המספר n^3-25n מתחלק ב-24 (ללא שארית) (7 נקודות)

ב. יהיו a,b,c,d מספרים טבעיים אי-זוגיים. בהנחה שסכומם מתחלק ב-24 (ללא שארית) הוכיחו כי סכום קוביותיהם $a^3+b^3+c^3+d^3$ מתחלק אף הוא ב-24, או הפריכו טענה זו באמצעות דוגמה נגדית.

פתרון: א. נוכיח את הטענה בשיטת האינדוקציה.

בדיקה עבור $n=1$ (המספר האי-זוגי הראשון): $1-25\cdot 1=-24$ מתחלק ב-24.

הנחת האינדוקציה: הביטוי הנדון מתחלק ב-24 עבור מספר אי-זוגי $1<n$ כלשהו.

הוכחת הטענה עבור $n+2$ (המספר האי-זוגי העוקב) על סמך הנחת האינדוקציה:

$$(n+2)^3-25(n+2)=(n^3+3n^2\cdot 2+3n\cdot 2^2+2^3)-25n-50=(n^3-25n)+(6n^2+12n-42)=$$
$$=(n^3-25n)+(6(n+1)^2-48)$$

הביטוי בסוגריים הראשונים מתחלק ב-24 לפי הנחת האינדוקציה; הביטוי בסוגריים השניים מתחלק אף הוא ב-24 מהטעמים הבאים: $n+1$ הוא מספר זוגי (כי n אי-זוגי) וריבוע של מספר זוגי מתחלק ב-4 וכאשר מספר המתחלק ב-4 מוכפל ב-6, אז המכפלה מתחלקת ב-24; כמובן, 48 מתחלק ב-24 והפרש של שני מספרים המתחלקים כ"א ב-24 מתחלק אף הוא ב-24. לבסוף, הסכום של שני הביטויים בסוגריים, שהוכחנו שכל אחד (מסיבות שונות) מתחלק ב-24, מתחלק אף הוא ב-24. **מ.ש.ל**

ב. בהשראת מה שהוכחנו בסעיף א', נחסיר מכל אחד מארבעת המחוברים 25 כפול המספר המתאים ונקווה לטוב:

$$a^3+b^3+c^3+d^3=\{(a^3-25a)+(b^3-25b)+(c^3-25c)+(d^3-25d)\}+25(a+b+c+d)$$

באגף ימין, כל אחד מארבעת המחוברים שבסוגריים המסולסלים מתחלק ב-24 על פי התוצאה בסעיף א' ואילו המחובר הנוסף מתחלק ב-24 כי הנחנו שסכום ארבעת המספרים הנתונים מתחלק ב-24. מכאן שסכום ארבע הקוביות באגף שמאל מתחלק ב-24 כי הצגנו אותו כסכום שני מספרים הידועים ככאלה.

6. הילוך פשוט על המספרים השלמים הוא טיול שבו המטייל מבצע בכל צעד תזוזה בגודל 1 ימינה (+1) או שמאלה (-1) מהמקום שבו היה בצעד הקודם. נניח שהטיול מתחיל בנקודה 0 ונסמן ב- S_n את מקום המטייל אחרי n צעדים (שימו לב ש- $-n\le S_n\le n$). מסלול באורך n הוא הקו השבור המחבר (בזו אחר זו) את הנקודות $(0,0),(1,S_1),(2,S_2),\dots,(n,S_n)$ במישור.

א. מהו מספרם הכולל של המסלולים באורך n ? (5 נקודות)

ב. מהו מספר המסלולים באורך n המסתיימים ב- $S_n=m$

כפונקציה של m ו-n ($-n\le m\le n$) ? (12 נקודות)

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרון: א. לכל צעד לאורכו של מסלול הטיול יש שתי אפשרויות (ימינה 1+ ושמאלה 1-) באופן בלתי תלוי בצעדים הקודמים של המסלול, כלומר כשמגדילים את הטיול בצעד אחד, מכפילים את מספר המסלולים. מאחר שברור מאליו כי מספר המסלולים באורך 1 הוא 2, מספר המסלולים באורך n הוא 2^n.

ב. כל מסלול נקבע על ידי סדרת הצעדים שלו שניתן לייצגה על ידי סדרה, באורך השווה לאורך המסלול, שאבריה הם 1+ או 1- . סדרות שונות כאלה קובעות מסלולים שונים. נקודת הסיום של מסלול (על ישר המספרים השלמים) הוא לכן סכום אברי סדרה זו; סכום זה הוא כמובן ההפרש בין מספר הצעדים ימינה (1+) למספר הצעדים שמאלה (1-) לאורך המסלול, באופן בלתי תלוי בסדר שבו הם מופיעים; שני מסלולים שבהם הפרשים אלה שווים מסתיימים באותה נקודה (אפילו אם המסלולים אינם שווי אורך).

נסמן ב-x את מספר הצעדים ימינה (1+), אזי $n-x$ הוא מספר הצעדים שמאלה (1-) ולפיכך

$$S_n = m = x-(n-x) = 2x-n \;\Rightarrow\; x=\frac{m+n}{2}$$

כדי לקבוע מסלול באורך n המסתיים בנקודה m יש לקבוע את הסדר שבו מבוצעים x צעדים ימינה ו- $n-x$ צעדים שמאלה לאורך סדרת n הצעדים ולכן מספר המסלולים המבוקש הוא $\binom{n}{x}=\binom{n}{\frac{n+m}{2}}=\binom{n}{\frac{n-m}{2}}$.

נשאיר לקוראים להשתכנע ש-$m+n$ חייב להיות מספר זוגי.