School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

פתרונות (31.12.2021)

1. א. הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית $\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=1+\frac{\sin 2\alpha}{2}$

ב. עבור כל הזוויות α בקטע $[0,2\pi]$ שהטנגנס שלהן שווה 3-, חשבו את הסינוס שלהן (לא נדרש לקבוע את גודל הזוויות עצמן, רק למקמן בתתי-קטע מתאימים)

פתרון: א.

$$\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin^2\alpha+\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1+\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

השוויון הראשון נובע מהזהות האלגברית $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

ב. המדובר בזוויות α בעלות טנגנס שלילי ולכן סינוס וקוסינוס שוני סימן. הסינוס והקוסינוס הם שוני סימן ברביע השני $[\pi/2,\pi]$ (בו הסינוס חיובי והקוסינוס שלילי) וברביע הרביעי $[1.5\pi,2\pi]$ (בו הסינוס שלילי והקוסינוס חיובי). בכל אחד מהרביעים האלה יש רק זווית אחת שהטנגנס שלה הוא 3-.

$$-3=tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\quad\Rightarrow\quad\sin^2\alpha=9(1-\sin^2\alpha)\quad\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

הערה: הערך המוחלט של הסינוס שהתקבל קרוב למדי ל-1, כך שבנקל ניתן לתחם את הזווית α בקטע יותר מצומצם מאשר רביע שלם.

2. א. מצאו את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה $|x-2|+|x+2|=4$

ב. יהיו $a,b,c>1$ מספרים ממשיים. פשטו את הביטוי

$\frac{2}{1+\log_a(b\cdot c)}+\frac{2}{1+\log_b(c\cdot a)}+\frac{2}{1+\log_c(a\cdot b)}$ ומצאו את ערכו המספרי (ערך הביטוי אינו תלוי ב- c,b,a)

2/-

פתרון: א. כאשר $x<-2$, $(|x|\neq 2)$ $|x-2|+|x+2|=(|x|+2)+(|x|-2)=2|x|\neq 4$

ובדומה כאשר $x>2$, כך שאין למשוואה פתרונות מחוץ לקטע $[-2,2]$ ועבור $-2\le x\le 2$,

$$|x-2|+|x+2|=\begin{cases}(2-|x|)+|2+|x|)=4 & (-2\le x<0)\\ (2-x)+(2+x)=4 & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

סיכום: קבוצת הפתרונות של המשוואה היא הקטע הסגור $[-2,2]$.

ב. נסמן את הביטוי הנתון ב-S ונשים לב כי

$$\begin{aligned}S&=\frac{2}{\log_a a+\log_a bc}+\frac{2}{\log_b b+\log_b ac}+\frac{2}{\log_c c+\log_c ab}\\&=\frac{2}{\log_a abc}+\frac{2}{\log_b abc}+\frac{2}{\log_c abc}=\frac{2}{\log_a abc}+\frac{2\log_a b}{\log_a abc}+\frac{2\log_a c}{\log_a abc}\\&=\frac{2}{\log_a abc}\left(\log_a a+\log_a b+\log_a c\right)+\frac{2}{\log_a abc}\cdot\log_a abc=2\end{aligned}$$

3. א. הוכיחו: אם $0<a<1<b$, אז $a\cdot b+1<a+b$

ב. טענה: לכל $2\le n$ (מספר טבעי), אם המכפלה של n מספרים חיוביים שווה 1, אז סכומם הוא לפחות n. בהנחה שטענה זו נכונה עבור $n=2$ (והיא אכן נכונה) הוכיחו אותה עבור $n=3$ וקבעו באילו תנאים סכום שלושת המספרים הוא 3 בדיוק

פתרון: א. $ab+1<a+b \iff ab-a=a(b-1)<b-1$

ואי השוויון הימני אכן מתקיים כי $a<1$ ו $0<b-1$ על פי הנתון.

ב. הנחה: אם $0<b,a$ ו $ab=1$, אז $a+b\ge 2$

צריך להוכיח: אם $0<c,b,a$ ו $a\cdot b\cdot c=1$, אז $a+b+c\ge 3$

●●● קריית האוניברסיטה, ת״ד 39040, רמת אביב, תל אביב 6139001 | טל': 6408044, 03-6408045 | פקס: 03-6407543
Tel Aviv University, P.O.box 39040, Ramat Aviv, Tel Aviv 6139001, Israel | Tel: 972-3-6408044, 6408045 | Fax: 972-3-6407543

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University
בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

הוכחה: לא ייתכן ששלושת המספרים קטנים מ-1 (כי אז מכפלתם קטנה מ-1) וגם לא שכולם גדולים מ-1 (כי אז מכפלתם גדולה מ-1), כך שיש בין השלושה מספר הקטן או שווה ל-1 וגם מספר הגדול או שווה ל-1. אם שלושתם שווים ל-1, אז סכומם שווה ל-3 (להלן נראה שזה המקרה היחיד של שוויון). במקרה האחר יש בין שלושת המספרים מספר קטן מ-1 וגם מספר גדול מ-1. נניח ש- $1>a$ ו- $1<c$ ונטען כדלהלן:

$$a+b+c=(ac+b)+a+c-ac\geq 2+a+c(1-a)>2+a+1\cdot(1-a)=3$$

אי השוויון הראשון (החלש) נובע מהנחת נכונות הטענה לשני מספרים (ac ו- b). אי השוויון האחרון (החזק) מעיד על כך שסכום שלושת המספרים שווה 3 רק אם כולם שווים.

4. הוכיחו שלכל n טבעי, $5^n-3^n-2^n$ מתחלק ב-6 ללא שארית

פתרון: אפשר להוכיח את הטענה באינדוקציה, אבל בחרנו להציג הוכחה אחרת המבוססת (בין השאר) על הזהות האלגברית $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$.

התחלקות ב-6 שקולה לזוגיות (התחלקות ב-2) והתחלקות ב-3. הוכחת זוגיות:

$5^n-3^n-2^n=(5^n-3^n)-2^n$ והמחובר שבסוגריים באגף ימין הוא הפרש של שני מספרים אי-זוגיים (מכפלות של אי-זוגיים) ולפיכך הוא זוגי, חזקה של 2 היא כמובן זוגית. הביטוי הנתון, בהיותו הפרש של שני מספרים זוגיים, מייצג מספר זוגי (לכל n טבעי).

הוכחת התחלקות ב-3:

$$5^n-3^n-2^n=(5^n-2^n)-3^n=(5-2)(5^{n-1}+5^{n-2}\cdot 2+...+2^{n-1})-3^n$$

$$=3\cdot(whole\ number\ -\ 3^{n-1})\ =\ 3(\text{מספר שלם})$$

זו כמובן כפולה של 3, כלומר מתחלקת ב-3. מספר זוגי המתחלק ב-3, מתחלק כאמור ב-6.

4/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

5. מצאו את כל המספרים המרוכבים המקיימים את המשוואה $z^6-7z^3-8=0$ והציגו אותם בהצגה קרטזית, כלומר בצורה $z=x+iy$.

פתרון: לפנינו משוואה פולינומיאלית ממעלה 6 שהיא (למזלנו) ריבועית ב-z^3:

$$z^6-7z^3-8=(z^3)^2-7z^3-8=(z^3-8)(z^3+1)=0 \;\Rightarrow\; z_1^3=8,\ z_2^3=-1$$

לפיכך פתרונות המשוואה הנתונה הם

$$(8)^{\frac{1}{3}}=2(1)^{\frac{1}{3}}=2[\cos(\frac{2\pi}{3}0)+i\sin(\frac{2\pi}{3}0)]=z_{1,0}=2(1+i\cdot 0)=2$$

$$z_{1,1}=2[\cos(\frac{2\pi}{3}\cdot 1)+i\sin(\frac{2\pi}{3}\cdot 1)]=2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=-1+i\sqrt{3}$$

$$z_{1,2}=2[\cos(\frac{2\pi}{3}2)+i\sin(\frac{2\pi}{3}2)]=2[-\frac{1}{2}+i(-\frac{\sqrt{3}}{2})]=-(1+i\sqrt{3})$$

אלה שלושת שורשי המשוואה הנובעים מ-z_1, בהצגתם הן הפולארית והן הקרטזית.

להלן שלושת השורשים הנובעים מ-$z_2=\sqrt[3]{-1}$:

$$z_{2,0}=(-1)^{\frac{1}{3}}=-1$$

$$z_{2,1}=|-1|(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$$

$$z_{2,2}=|-1|(-\frac{1}{2}+i(-\frac{\sqrt{3}}{2}))=-\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$$

כל אלה יחד מהוים את ששת הפתרונות של המשוואה ממעלה 6 הנתונה.

5/-

School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

.6 $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1} \quad (n=1,2,3,...)$)

א. הוכיחו אחד בלבד משני אי-שוויונות אלה לפי בחירתכם; ציינו איזה מהם בחרתם להוכיח

ב. הוכיחו שלכל n טבעי (רק עבור $n=1$ יש שוויון באי-שוויון הימני)

$$2\sqrt{n}-2 < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}-1$$

ג. חשבו את הערך השלם של $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{1,000,000}}$

כזכור, הערך השלם של מספר ממשי הוא המספר השלם הגדול ביותר שהוא קטן מהמספר הממשי המדובר, או שווה לו.

פתרון: א. נוכיח את אי-השוויון הימני, הוכחת השמאלי דומה. כשכופלים את שני אגפי אי השוויון ב-$\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$ מקבלים:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}) = 2[n-(n-1)] = 2\cdot 1 = 2$$

והאגף השמאלי של אי שוויון זה אמנם קטן מ-2 כי $\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})=1+\sqrt{\frac{n-1}{n}}<1+1=2$.

ב. על פי אי השוויונות שהוכחו בסעיף א':

$$1+2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}} < 1+2\sum_{k=2}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

אגף שמאל (החסם התחתון) $= \quad 1+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{2}) > 2\sqrt{n}-2\sqrt{2}+1 > 2\sqrt{n}-3+1=2\sqrt{n}-2$

אגף ימין (החסם העליון) $= \quad = 1+2(\sqrt{n}-\sqrt{1}) = 2\sqrt{n}-1$

שימו לב שחסמנו את הסכום הקשה לחישוב בין שני ערכים שהפרש 1.

ג. עבור $n=1,000,000$ החסמים שהתקבלו בסעיף ב' נותנים 1,998 ו-1,999 כך שהערך השלם המבוקש הוא 1,998.