



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 11.7.2025

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- אין להיעזר במחשבון או בכל חומר עזר אחר.
- בבחינה 6 שאלות רגילות ושאלת בונוס לקבוצות B ו-C בלבד. יש לפתור את כל השאלות. תשובה מלאה ונכונה נושאת 17 נקודות זכות לכל שאלה רגילה ו-10 נקודות לשאלת הבונוס. יש להוכיח כל טענה באופן מלא.
- בשאלות מרובות סעיפים, ניתן להתבסס על סעיפים קודמים, בין אם נפתרו ובין אם לא.

בהצלחה!

1. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

(א) תהי $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרת לפי

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2n + 1 \end{cases}$$

i. הוכיחו כי $f(n) = n^2$ לכל $n \in \mathbb{N}$. (6 נקודות)

ii. האם f חח"ע? (2 נקודות)

iii. האם f על? (2 נקודות)

(ב) פתרו את אי השוויון הבא: $\left| \frac{2x-3}{x+1} \right| \leq 1$. (7 נקודות)

2. עבור אפליקציה מסוימת נדרשת סיסמה מתוך האותיות A, B, C, D והספרות 1, 2, 3.

(א) כמה סיסמאות שונות בגודל 3 תווים וכל תו יכול להופיע פעם אחת לכל היותר ניתן ליצור:

i. אם יש חשיבות לסדר? (4 נקודות)

ii. אם יש חשיבות לסדר וחייבים להשתמש לפחות באות אחת ולפחות בספרה אחת? (3 נקודות)

iii. אם אין חשיבות לסדר וחייבים להשתמש לפחות באות אחת ולפחות בספרה אחת? (3 נקודות)

- (7 נקודות) (ב) כמה סיסמאות שונות בגודל 11 תווים ניתן ליצור אם יש חשיבות לסדר, האותיות A, B מופיעות 3 פעמים כל אחת, C, D מופיעות פעמיים כל אחת, הספרה 1 מופיעה פעם אחת, והספרות 2, 3 לא מופיעות כלל? (ניתן להשאיר את הביטוי לא מפורט).
3. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):
- (9 נקודות) (א) מצאו את כל הערכים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $2^x + 2^{-x} = 5$. (ניתן לרשום את הפתרונות כביטוי לוגריתמי).
- (8 נקודות) (ב) מצאו את כל הערכים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $x^{\ln x} = e^2$.
4. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):
- (10 נקודות) (א) מצאו את שארית החלוקה של 7^{2025} ב-6.
- (7 נקודות) (ב) מצאו את כל המספרים הטבעיים הקטנים מ-102 שכאשר מחלקים אותם ב-5 מקבלים שארית 2 וכאשר מחלקים אותם ב-7 מקבלים שארית 2.
- (17 נקודות) 5. מצאו את המספרים הממשיים $x \in \mathbb{R}$ המקיימים $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
6. יהי $z \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב כך ש- $|z| = 1$ וגם
- $$z + \frac{1}{z} = 1$$
- (8 נקודות) (א) רשמו בצורה קרטזית את כל המספרים המרוכבים $z = a + bi$ המקיימים תנאים אלו.
- (2 נקודות) (ב) ציירו (בקירוב) את קבוצת הפתרונות במישור המרוכב.
- (7 נקודות) (ג) הציגו כל פתרון בצורה פולרית. כלומר, לכל פתרון z מצאו r ו- θ כלשהם כך ש- $z = re^{i\theta}$.
- (10 נקודות) 7. שאלת בונוס - (לקבוצות B ו-C בלבד): נבנה קבוצה X באופן הבא: $\phi \in X$ ולכל $a \in X$ מתקיים $a \cup \{a\} \in X$. מצאו איבר בגודל 4 ב- X ורשמו אותו בצורה מפורשת.