



School of Mathematical Sciences
The Raymond and Beverly Sackler
Faculty of Exact Sciences
Tel Aviv University

בית הספר למדעי המתמטיקה
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

מבחן סיווג במתמטיקה 11.7.2025 - פתרון

1. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

(א) תהי $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרת לפי

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(n+1) = f(n) + 2n + 1 \end{cases}$$

i. הוכיחו כי $f(n) = n^2$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

ii. האם f חז"ע?

iii. האם f על?

(ב) פתרו את אי השוויון הבא: $\left| \frac{2x-3}{x+1} \right| \leq 1$.
תשובה:

א. i. נוכיח באינדוקציה על n : בסיס $n = 0$ - לפי ההגדרה. צעד: נניח כי נכון עבור n כלומר $f(n) = n^2$ ונוכיח כי $f(n+1) = (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} f(n+1) &= f(n) + 2n + 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

כאשר השוויון השני נובע מהנחת האינדוקציה.

ii. הפונקציה חז"ע: נניח $f(m) = f(n)$ אז $m^2 = n^2$ נוציא שורש (m, n) חיוביים ונקבל $m = n$.

iii. הפונקציה לא על: לא קיים n טבעי כך ש $f(n) = 2$ אחרת נקבל $n = \sqrt{2}$.
ב. ראשית נשים לב כי הביטוי אינו מוגדר עבור $x = -1$ ולכן $x \neq -1$. הנקודות שבהן הסימן יכול להשתנות הן $x = -1, 1.5$. נחלק למקרים השונים כאשר בכל תחום הסימן של הביטוי בערך מוחלט הוא קבוע ולכן נוכל להחליף את הערך המוחלט בכפל ב ± 1 בהתאם.

עבור $x < -1$: הסימן של המונה והמכנה שלילי ולכן בתחום זה הסימן חיובי והאי

$$\begin{aligned}\frac{2x-3}{x+1} &\leq 1 \\ 2x-3 &\geq x+1 \\ x &\geq 4\end{aligned}$$

(שימו לב שהכפלנו ב $x+1$ הסימן התהפך כי זהו מספר שלילי בתחום זה) אין מספרים בתחום זה המקיים תנאי זה ולכן בתחום זה אין פתרון.
עבור $1.5 \leq x < -1$: הסימן של הביטוי בערך מוחלט הוא שלילי ולכן נקבל

$$\begin{aligned}-\frac{2x-3}{x+1} &\leq 1 \\ -2x+3 &\leq x+1 \\ x &\geq \frac{2}{3}\end{aligned}$$

לכן במקרה זה נקבל פתרונות $\frac{2}{3} \leq x \leq 1.5$.
עבור $x \leq 1.5$: נקבל אותו סימן כמו במקרה $x < -1$, כלומר

$$\frac{2x-3}{x+1} \leq 1$$

אבל הפעם כשנכפיל ב $x+1$ מכפילים בביטוי חיובי ולכן נקבל

$$x \leq 4$$

לכן במקרה זה נקבל פתרונות $1.5 \leq x \leq 4$.

סך הכל x הוא פתרון אם

$$x \in \left[\frac{2}{3}, 4\right]$$

2. עבור אפליקציה מסוימת נדרשת סיסמה מתוך האותיות A, B, C, D והספרות 1, 2, 3.

(א) כמה סיסמאות שונות בגודל 3 תווים וכל תו יכול להופיע פעם אחת לכל היותר ניתן ליצור :

i. אם יש חשיבות לסדר?

ii. אם יש חשיבות לסדר וחייבים להשתמש לפחות באות אחת ולפחות בספרה אחת?

iii. אם אין חשיבות לסדר וחייבים להשתמש לפחות באות אחת ולפחות בספרה אחת?

(ב) כמה סיסמאות שונות בגודל 11 תווים ניתן ליצור אם יש חשיבות לסדר, האותיות A, B מופיעות 3 פעמים כל אחת, C, D מופיעות פעמיים כל אחת, הספרה 1 מופיעה פעם אחת, והספרות 2, 3 לא מופיעות כלל? (ניתן להשאיר את הביטוי לא מפורט)
תשובה :

א. i. מספר האפשרויות לבחור קבוצה (כך לא יהיו חזרות) בת 3 תווים הוא $\binom{7}{3}$ מספר האפשרויות לסדר את הקבוצה הוא $3!$. סך הכל

$$\binom{7}{3} 3! = \frac{7!}{3!4!} 3! = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

ii. מספר האפשרויות לבחור קבוצה בת 3 אותיות בלבד הוא 4 וביחד עם הסדר נקבל $4 \cdot 3! = 4! = 24$. מספר האפשרויות לבחור קבוצה בת 3 ספרות בלבד הוא 1 וביחד עם הסדר נקבל $3! = 6$. לכן אם נחסיר את המספרים האלו נקבל את המספר הדרוש

$$210 - 24 - 6 = 180$$

iii. נחזור על הסעיפים הקודמים אך הפעם ללא סדר

$$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = \frac{7!}{3!4!} - 4 - 1 = 35 - 5 = 30$$

ב. מספר האפשרויות לסידור 11 תווים הוא $11!$. אך מספר זה הוא תוצאת מכפלה בכל הסידורים הפנימיים של האותיות המופיעות יותר מפעם אחת. סך הסידורים הפנימיים הוא $2!2!3!3!$. לכן התוצאה היא

$$\frac{11!}{2!2!3!3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$$

3. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

(א) מצאו את כל הערכים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $2^x + 2^{-x} = 5$. (ניתן לרשום את הפתרונות כביטוי לוגריתמי).

(ב) מצאו את כל הערכים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $x^{\ln x} = e^2$. פתרון:

א. נסמן $t = 2^x$. אז נקבל $t + \frac{1}{t} = 5$. נכפיל ב t ונקבל $t^2 - 5t + 1 = 0$. אז $t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. אלו מספרים חיוביים (וודאו). לכן

$$x_{1,2} = \log_2 \left(\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \right)$$

ב. ניקח $\ln$ על שני האגפים (כשיש שוויון שני האגפים חיוביים) ונקבל

$$\begin{aligned} \ln(x^{\ln x}) &= \ln(e^2) \\ (\ln x)^2 &= 2 \\ \ln x &= \pm \sqrt{2} \\ x &= e^{\pm \sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. פתרו את הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

(א) מצאו את שארית החלוקה של 7^{2025} ב-6.

(ב) מצאו את כל המספרים הטבעיים הקטנים מ-102 שכאשר מחלקים אותם ב-5 מקבלים שארית 2 וכאשר מחלקים אותם ב-7 מקבלים שארית 2. פתרון:

א. נשים לב כי $7 = 6 + 1$ ולכן

$$7^{2025} = (6 + 1)^{2025}$$

כשפותחים סוגריים מקבלים ביטויים שכולם מתחלקים ב-6 פרט למקרה בו מכל אחד מ-2025 הסוגריים בוחרים את 1 ולכן כפל של 1 בעצמו 2025 יוצא 1 וזו השארית.

ב. מספר n המקיים תכונות אלו הינו מהצורה $n = 5m + 2$ וגם $n = 7k + 2$ לכן $n - 2$ מתחלק ב 5 וגם 7, כלומר $n - 2$ מתחלק ב 35. אז $n = 35r + 2$. נקבל כי

$$35r + 2 < 102$$

$$35r < 100$$

$$r < \frac{100}{35}$$

אז $r = 0, 1, 2$ ולכן $n = 2, 37, 72$

5. מצאו את המספרים הממשיים $x \in \mathbb{R}$ המקיימים $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. תשובה:

נכפיל את המשוואה ב-1 ונשתמש בזהות $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ עבור $a = x - \frac{\pi}{3}$:

$$\cos\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

נשתמש בזהות $\cos(b + \pi) = -\cos b$ עבור $b = 2x - \frac{2\pi}{3}$:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

לכן הפתרונות האפשריים הם

$$2x + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x = \pi k \\ x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \end{cases}$$

6. יהי $z \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב כך ש $|z| = 1$ וגם

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

(א) רשמו בצורה קרטזית את כל המספרים המרוכבים $z = a + bi$ המקיימים תנאים אלו.

(ב) ציירו (בקירוב) את קבוצת הפתרונות במישור המרוכב.

(ג) הציגו כל פתרון בצורה פולרית. כלומר, לכל פתרון z מצאו r ו- θ כלשהם כך ש- $z = re^{i\theta}$.

תשובה:

א. נשתמש בזהות $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$. מהנתון הראשון נקבל

$$z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$$

נציב בנתון השני ונקבל

$$z + \bar{z} = 1$$

אם נרשום $z = x + iy$ אז בעצם קיבלנו $2x = 1$ ולכן $x = \frac{1}{2}$. נחזור בחזרה

$$1 = |z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + y^2$$

אז $y^2 = \frac{3}{4}$ ולכן $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. כל הפתרונות הם $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 ב. אלו 2 נקודות על מעגל היחידה, אחת ברביע הראשון (כאשר ערך y יותר גדול מערך x) והשנייה היא שיקוף של הראשונה ביחס לציר ה- x ברביע הרביעי.
 ג. הרדיוס שווה לערך המוחלט, כלומר $r = 1$. הזווית θ מקיימת

$$\tan \theta = \pm \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \pm \sqrt{3}$$

ומאי-זוגיות $\tan$ ומהערכים הידועים של $\sin$ ו- $\cos$ נקבל כי $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. סה"כ $z_{1,2} = e^{\pm i \frac{\pi}{3}}$.

7. שאלת בונוס - (לקבוצות B ו-C בלבד): נבנה קבוצה X באופן הבא: $\phi \in X$ ולכל $a \in X$ מתקיים $a \cup \{a\} \in X$. מצאו איבר בגודל 5 ב- X ורשמו אותו בצורה מפורשת.
 תשובה:

$$\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}$$