

קורס הכנה למבחן סיווג במתמטיקה

אוריאל רוזנצוויג

© כל הזכויות שמורות (2023) - רשימות המרצה של אוריאל רוזנצוויג בקורס ההכנה למבחן סיווג במתמטיקה.
ניתן לפנות במייל aurielr@tauex.tau.ac.il לכל שאלה.

תוכן העניינים

4	1 מבוא קצר לתורת הקבוצות ולוגיקה מתמטית	1
4	1.1 הגדרות וסימונים	
9	1.2 פעולות על קבוצות ודיאגרמת ון	
9	1.2.1 חיתוך קבוצות	
10	1.2.2 איחוד קבוצות	
12	1.2.3 הפרש קבוצות	
13	1.2.4 הפרש סימטרי של קבוצות	
13	1.2.5 קבוצת המשלים	
14	1.2.6 מכפלה קרטזית	
16	1.3 מבוא ללוגיקה מתמטית	
16	1.3.1 קשרים לוגיים	
18	1.3.2 כמתים לוגיים	
19	1.4 תבניות הוכחה	
19	1.4.1 טענת לכל	
19	1.4.2 טענת קיים	
19	1.4.3 הכלה חד כיוונית	
19	1.4.4 שוויון קבוצות	
19	1.4.5 הוכחה בדרך השלילה	
21	1.5 תרגילים ממבחנים	
22	2 פונקציות	2
22	2.1 הגדרות וסימונים	
28	2.2 פונקציות חשובות	
28	2.2.1 פונקציה ממשית	
29	2.2.2 הפונקציה הקבועה	
29	2.2.3 פונקציית הזהות	
29	2.2.4 פונקציית האינדקטור	
30	2.2.5 תמורות	
30	2.2.6 פונקציית הערך המוחלט	
31	2.3 פעולות ויחסים בין פונקציות	
31	2.3.1 שוויון פונקציות	

31	פעולות על התחום והטווח של פונקציה	2.3.2
32	פעולות על פונקציות ממשיות	2.3.3
33	הרכבת פונקציות ופונקציה הופכית	2.4
37	תכונות נוספות של פונקציות	2.5
37	מונוטוניות	2.5.1
37	פונקציה זוגית / אי זוגית	2.5.2
39	תרגילים ממבחנים	2.6
40	3 אי שוויונות	
40	אי שוויונות ממעלה ראשונה	3.1
41	מערכת אי שוויונות	3.2
41	אי שוויונות ממעלה שניה	3.3
42	פתרון משוואות פרבוליות	3.3.1
44	אי שוויון רציונלי	3.4
46	אי שוויונות עם ערך מוחלט	3.5
47	אי שוויון המשולש ואי שוויון הממוצעים	3.6
47	אי שוויון המשולש	3.6.1
48	אי שוויון הממוצעים	3.6.2
49	תרגילים ממבחנים	3.7
50	4 פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות	
50	הפונקציה המעריכית	4.1
50	הגדרות ותכונות	4.1.1
51	משוואות מעריכיות	4.1.2
52	אי שוויונות מעריכיים	4.1.3
53	הפונקציה הלוגריתמית	4.2
53	הגדרות ותכונות	4.2.1
54	משוואות לוגריתמיות	4.2.2
54	אי שוויונות לוגריתמים	4.2.3
56	תרגילים ממבחנים	4.3
57	5 פונקציות טריגונומטריות	
57	הגדרות	5.1
58	הפונקציות הטריגונומטריות הממשיות	5.2
58	סינוס	5.2.1
60	קוסינוס	5.2.2
61	טנגנס	5.2.3
61	ערכים חשובים וזהויות טריגונומטריות	5.2.4
62	משוואות טריגונומטריות	5.3
64	תרגילים ממבחנים	5.4
65	6 אינדוקציה ומספרים שלמים	
65	הצגת העיקרון ותרגילים	6.1
67	חלוקת מספרים שלמים	6.2
70	סכנות האינדוקציה	6.3
72	תרגילים ממבחנים	6.4

74	7 מספרים מרוכבים
74	7.1 מוטיבציה
75	7.2 הגדרות ופעולות בסיסיות
75	7.2.1 הצגה קרטזית
75	7.2.2 שוויון, חיבור, חיסור וכפל של מספרים מרוכבים
76	7.2.3 צמוד מרוכב, ערך מוחלט וחילוק של מספרים מרוכבים
78	7.2.4 שורשים של פולינומים
80	7.3 הצגה פולארית ונוסחת דה מואבר
80	7.3.1 הצגה פולארית
83	7.3.2 משפט דה מואבר
84	7.3.3 חישוב שורשים מרוכבים
86	7.4 תרגילים ממבחנים
87	8 קומבינטוריקה
87	8.1 עיקרון הסבום והמכפלה
88	8.2 בחירת עצמים מתוך קבוצה
88	8.2.1 שליפה עם החזרה ועם חשיבות לסדר
89	8.2.2 שליפה ללא החזרה ועם חשיבות לסדר
90	8.2.3 שליפה ללא החזרה וללא חשיבות לסדר
91	8.2.4 תרגילים מסכמים
92	8.3 שובך היונים
96	8.4 תרגילים ממבחנים

1 מבוא קצר לתורת הקבוצות ולוגיקה מתמטית

מתמטיקה היא שפה. וכמו בכל שפה אחרת, השלב הראשון שדרוש בכדי שנוכל לתקשר בשפה הזאת בכתב, הוא למידת האלפבית.

כבר בגן למדנו את האותיות הראשונות, הספרות. בבית הספר היסודי למדנו אותיות נוספות, כגון סימני החיבור (+) והחיסור (-).

בפרק הקרוב, נלמד את הסימונים החשובים שיאפשרו לנו לדבר על קבוצות. אנחנו נראה לאורך הקורס (וביתר שאת לאורך התואר) שמושג הקבוצה מופיע לעיתים קרובות מאוד, ולמעשה רוב מה שנלמד בקורס הוא מחקר של תכונות מסוימות של קבוצות, והקשר בין קבוצות שונות.

1.1 הגדרות וסימונים

הגדרה 1.1 – (קבוצה)

קבוצה היא אוסף של אובייקטים.
אין חשיבות לסדר או לחזרות איברים בקבוצה.
את הקבוצה נציג באמצעות סוגריים מסולסלות, $\{ \}$, ואת איברי הקבוצה, נפריד באמצעות פסיק.
את מספר האיברים בקבוצה A נסמן באמצעות $|A|$.

בשונה מהגדרות מתמטיות אחרות שנראה בהמשך, הגדרת קבוצה בשפה בה השתמשנו, היא מעט מעורפלת ואיננה פורמלית.

מה שמגדיר קבוצה, זו התשובה לשאלה "מי הם האובייקטים ששייכים לקבוצה?"

הערה

משמעות האמירה "ללא חשיבות לסדר האיברים בקבוצה", היא שהקבוצות:

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{2, 1\}$$

הן למעשה אותה קבוצה.

משמעות האמירה "חשיבות לחזרות האיברים בקבוצה", היא שהקבוצות:

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{1, 1, 2, 2, 2\}$$

הן למעשה אותה קבוצה, ומתקיים $|B| = 2$.

ניתן להגדיר קבוצה על ידי ציון כל איברי הקבוצה.

1.2 דוגמה

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

לחילופין, נוכל לציין רק את חלק מאיברי הקבוצה. נעשה זאת רק כאשר נקפיד שלכל קורא. ת יהיה ברור לאיזו קבוצה התכוונו.

דוגמה 1.3

קבוצת המספרים הטבעיים בין 1 לבין 10 היא

$$A = \{1, 2, \dots, 10\}$$

קבוצת המספרים הטבעיים היא

$$B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

לפני שנציג שתי דרכים נוספות להגדיר קבוצות, נגדיר מושג חשוב.

הגדרה 1.4 – (שייכות)

נאמר שאיבר a שייך לקבוצה A , ונכתוב:

$$a \in A$$

אם a הוא איבר בקבוצה A .

תרגיל 1.5

נתבונן בקבוצה:

$$A = \{1, \{2\}, \text{cat}\}$$

1. האם $1 \in A$?

2. האם $2 \in A$?

פתרון:

1. כן.

2. לא. המספר 2 איננו איבר בקבוצה A . האיבר ששייך לקבוצה A הוא $\{2\}$. אמנם האיברים 2 ו- $\{2\}$ דומים, אך מדובר באובייקטים שונים לחלוטין. בעוד 2 הוא מספר, $\{2\}$ היא קבוצה.

באמצעות סימן השייכות, ישנן שתי דרכים נוספות להגדיר קבוצות. נכיר אותן באמצעות דוגמה. הדרך הראשונה היא באמצעות שיטת ההפרדה. בשיטה זו אנחנו נייצר קבוצה מתוך קבוצה אחרת.

דוגמה 1.6

נתבונן בקבוצה:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

ונייצר באמצעותה את הקבוצה:

$$B = \{a \in A \mid a \text{ מספר זוגי}\} = \{2, 4\}$$

כיצד לקרוא את הגדרת הקבוצה B ? משמאל לקו ההפרדה, אנחנו נציין מהי הקבוצה ממנה נייצר את הקבוצה B , את קו ההפרדה, יש לקרוא "כך ש-" ומימין לקו ההפרדה, נציין את התנאי. במקרה שלנו: הקבוצה B היא קבוצה כל איברי הקבוצה A כך שהם מספרים זוגיים.

הדרך השניה היא שיטת ההחלפה.

דוגמה 1.7

מתוך הקבוצה A מהדוגמה הקודמת, נייצר את הקבוצה:

$$C = \{2a \mid a \in A\} = \{2, 4, 6, 8\}$$

כיצד לקרוא את הגדרת הקבוצה C ? משמאל לקו ההפרדה, אנחנו נציין את הפעולה אותה נפעיל על האיברים. תוצאת הפעולה תהיה איבר בקבוצה החדשה. מימין לקו ההפרדה נציין מי אלו האיברים שעליהם נפעיל את אותה פעולה. במקרה שלנו: הקבוצה C היא קבוצת כל המספרים שהם איבר של הקבוצה A כפול 2.

בעת נוכל להגדיר מספר קבוצות חשובות. מכיוון שאלו קבוצות שמופיעות הרבה במתמטיקה, לכל אחת מהן יש סימון מיוחד.

הגדרה 1.8 – (קבוצות חשובות)

1. הקבוצה הריקה:

$$\emptyset = \{\}$$

2. קבוצת המספרים הטבעיים:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

3. קבוצת המספרים השלמים:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

4. קבוצת המספרים הרציונליים (קבוצת השברים הפשוטים):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

לקבוצות אלו נוסיף גם את קבוצת המספרים הממשיים, $\mathbb{R}$, אותה לא נגדיר במפורש, אך נחשוב עליה בתור קבוצת כל המספרים שניתן להציג בתור שבר עשרוני, כאשר אנחנו נאפשר לכתוב אינסוף ספרות אחרי הנקודה העשרונית. עובדה מפתיעה היא שזו לא קבוצת המספרים הרציונליים. קבוצת המספרים הממשיים מכילה גם את המספר $\sqrt{2}$ ואת המספר π שאינם מספרים רציונליים. בהמשך הקורס נכיר גם את קבוצת המספרים המרוכבים, $\mathbb{C}$.

הגדרה 1.9 – (קטעים וקרנות)

נגדיר במפורש את הקטעים והקרנות. מושג שהכרנו כבר בבית הספר. זו הזדמנות לתרגל שוב הגדרת קבוצה באמצעות הפרדה.

נקבע שני מספרים ממשיים $a \leq b$.

הקטע הסגור בין a ו- b הוא:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

הקטע הפתוח בין a ו- b הוא:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

הקטעים החצי סגורים וחצי פתוחים בין a ו- b הם:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

בדומה, הקרנות הסגורות והפתוחות הן:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

כפי שראינו בדוגמאות הקודמות, את אותה הקבוצה, ניתן להגדיר בדרכים שונות. נרצה להגדיר באופן פורמלי את מושג שוויון הקבוצות, אך לשם כך נצטרך להגדיר את מושג ההכלה.

הגדרה 1.10 – (הכלת קבוצות)

נאמר שהקבוצה B מוכלת בקבוצה A , או באופן שקול שהקבוצה B היא תת קבוצה של הקבוצה A , ונרשום $B \subseteq A$ אם לכל $b \in B$ מתקיים גם $b \in A$.

כלומר, כל אחד מאיברי B הוא איבר של הקבוצה A .

1.11 תרגיל

הוכיחו שמתקיים:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

פתרון:

נוכיח רק את ההכלה $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. את השאר נפתור בצורה דומה.

אכן, לכל $a \in \mathbb{Z}$, ניתן לכתוב $a = \frac{a}{1}$. כלומר, a הוא מהצורה של איברי הקבוצה $\mathbb{Q}$. כלומר $a \in \mathbb{Q}$.

האיבר a הוא איבר כללי של הקבוצה $\mathbb{Z}$. כלומר, ההוכחה שלנו לא הייתה משתנה אם בחרנו כל איבר אחר של $\mathbb{Z}$. לכן

הראנו למעשה שכל איבר של $\mathbb{Z}$ הוא גם איבר של $\mathbb{Q}$, ומהגדרת ההכלה $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

תרגיל 1.12

נתבונן בקבוצה

$$A = \{\mathbb{N}, \{\mathbb{N}\}\}$$

1. האם $5 \subseteq A$?
2. האם $5 \in A$?
3. האם $\mathbb{N} \subseteq A$?
4. האם $\mathbb{N} \in A$?
5. האם $\{\mathbb{N}\} \subseteq A$?

פתרון:

1. לא. 5 הוא מספר ולא קבוצה. הכלה היא יחס בין קבוצות.
2. לא. בקבוצה A יש שני איברים בלבד. אף אחד מהם הוא לא המספר 5.
3. לא. המספר 5 למשל שייך לקבוצה $\mathbb{N}$ אך לא שייך לקבוצה A . לכן לא מתקיים שכל איבר של $\mathbb{N}$ הוא איבר של A .
4. כן. האיבר $\mathbb{N}$ הוא אחד מאיברי הקבוצה A .
5. כן. בקבוצה $\{\mathbb{N}\}$ יש איבר יחיד, $\mathbb{N}$. בסעיף הקודם ציינו שהוא שייך ל- A . לכן כל איברי $\{\mathbb{N}\}$ שייכים ל- A .

משפט 1.13

לכל קבוצה A , מתקיים:

$$\emptyset \subseteq A$$

הוכחה

נניח בשלילה אחרת. תהא A קבוצה עבורה מתקיים $\emptyset \not\subseteq A$. מהגדרת הכלה נובע שקיים $a \in \emptyset$ עבורו מתקיים $a \notin A$. בפרט נובע מכך שקיים איבר ששייך לקבוצה הריקה. אך זה לא ייתכן, וקיבלנו סתירה לוגית (נרחיב על כך בהמשך). לכן הטענה נכונה.

תרגיל 1.14

כתבו את כל תתי הקבוצות של הקבוצה:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

פתרון:

נכתוב את תתי הקבוצות של A לפי גדלי הקבוצות.

- בגודל 0, יש את תת הקבוצה הריקה $\emptyset$.

- בגודל 3, יש את הקבוצה A עצמה.
 - בגודל 1, הקבוצות $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.
 - בגודל 2, הקבוצות $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.
- סה"כ 8 תתי קבוצות.

משפט 1.15

תהא A קבוצה סופית, מספר תתי הקבוצות שלה הוא $2^{|A|}$.

הוכחה

נכתוב $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.
 תהא $X \subseteq A$ תת קבוצה. כל איבר ב- A שייך או לא שייך ל- X . כלומר, ראשית נשאל האם $a_1 \in X$? לאחר מכן נשאל האם $a_2 \in X$? ונמשיך הלאה עד לשאלה האם $a_n \in X$?
 לכל אחת מהשאלות הללו, שתי תשובות אפשריות. כן או לא. קיבלנו התאמה בין תתי קבוצות של A לבין סדרות באורך n של כן/לא. כלומר בסה"כ מספר האפשרויות הוא:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_n = 2^n$$

בסך הכל, יש 2^n תתי קבוצות ל- A .

נגדיר כעת את המושג שוויון קבוצות.

הגדרה 1.16 – (שוויון קבוצות)

נאמר שהקבוצות A ו- B שוות, ונכתוב $A = B$ אם מתקיים $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq A$.

1.2 פעולות על קבוצות ודיאגרמת ון

כעת נרצה לראות כיצד ניתן לייצר מתוך קבוצות נתונות, קבוצות חדשות. ישנן 6 פעולות מרכזיות בהן נתמקד. זו הזדמנות להכיר גם את דיאגרמת ון.

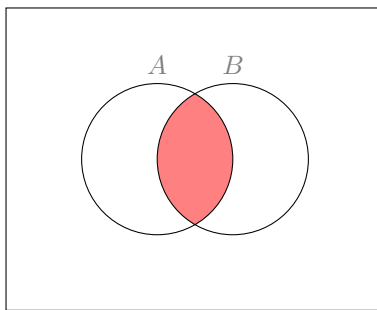
1.2.1 חיתוך קבוצות

הגדרה 1.17 – (חיתוך קבוצות)

בהנתן שתי קבוצות A, B , נגדיר את החיתוך שלהן, $A \cap B$, להיות קבוצת כל האיברים ששייכים גם ל- A וגם ל- B .
 כלומר:

$$A \cap B = \{a \in A \mid a \in B\} = \{a \in B \mid a \in A\}$$

בדיאגרמת ון, אותה נכיר באמצעות הדוגמה הבאה, החיתוך של A ו- B הוא החלק הצבוע:



הערה

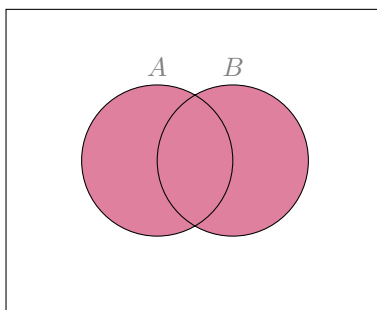
כאשר $A \cap B = \emptyset$ נאמר ש- A ו- B קבוצות זרות.

1.2.2 איחוד קבוצות

הגדרה 1.18 – (איחוד קבוצות)

בהנתן שתי קבוצות A, B , נגדיר את האיחוד שלהן, $A \cup B$, להיות קבוצת כל האיברים ששייכים ל- A או שייכים ל- B . כלומר:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ או } x \in B\}$$



הערה

כאשר A ו- B קבוצות זרות:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

1.19 תרגיל

תהיינה A, B, C קבוצות. נגדיר:

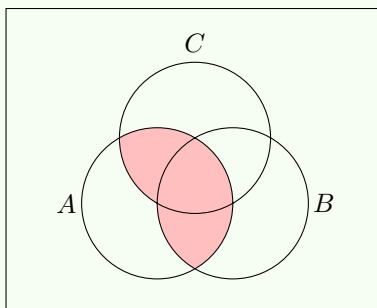
$$D = A \cap (B \cup C)$$

$$E = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

שרטטו דיאגרמת ון של D והוכיחו ש- $D = E$

פתרון:

ראשית נשרטט את הדיאגרמה:



נעת נוכיח את שוויון הקבוצות. על פי הגדרת שוויון קבוצות, יש להוכיח שמתקיימות שתי הכללות. לשיטה זו נקרא הכלה דו כיוונית.

מדוע $D \subseteq E$? לכל $x \in D$, מהגדרת החיתוך, $x \in A$ וגם $x \in B \cup C$.
 אם $x \in B$, אז מהגדרת החיתוך $x \in A \cap B$ ולכן מהגדרת האיחוד, $x \in E$.
 בדומה, אם $x \in C$, אז $x \in A \cap C$ ולכן $x \in E$.
 מדוע $E \subseteq D$? לכל $x \in E$, מהגדרת האיחוד, $x \in A \cap B$ או $x \in A \cap C$.
 אם $x \in A \cap B$, מהגדרת החיתוך, $x \in A$ וגם $x \in B$. מהגדרת האיחוד, נובע מכך ש- $x \in B \cup C$ ולכן מהגדרת החיתוך $x \in D$.
 אם $x \in A \cap C$, נקבל בדיוק באותה הצורה ש- $x \in D$.
 בסה"כ הוכחנו הכלה דו כיוונית. כלומר הוכחנו ש- $D \subseteq E$ וגם $E \subseteq D$, ולכן $D = E$.

תרגיל 1.20

תהיינה A, B קבוצות. נביח ש- $A \cup B = \emptyset$ אז $A = \emptyset$ וגם $B = \emptyset$.

תרגיל 1.21

הוכיחו שאם

$$1. A \cap (B \cup C) = \emptyset$$

$$2. A \cup B = A \cup C$$

אז $B = C$.

פתרון:

ראשית, מההנחה הראשונה ומהתרגיל שפתרנו קודם:

$$\emptyset = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

מהתרגיל הקודם, נובע מכך ש- $A \cap B = \emptyset$ וגם $A \cap C = \emptyset$. נשתמש בתובנה זו ובהנחה השנייה כדי להוכיח את

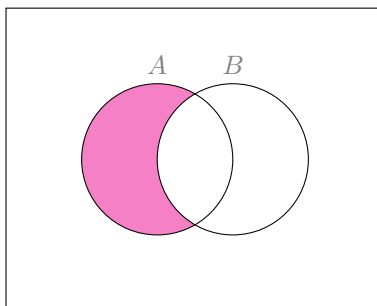
הטענה.
 נרצה להוכיח ש- $B = C$. ראשית, נוכיח ש- $B \subseteq C$. יהי $x \in B$. מהגדרת האיחוד, $x \in A \cup B$ ולכן מההנחה, $x \in A \cup C$. מכיוון ש- $A \cap B = \emptyset$, לא ייתכן ש- $x \in A$. לכן בהכרח $x \in C$.
 ההוכחה של ההכלה השנייה היא זהה. בסה"כ, $B = C$.

1.2.3 הפרש קבוצות

הגדרה 1.22 – (הפרש קבוצות)

בהנתן שתי קבוצות A, B , נגדיר את ההפרש של B מ- A , $A \setminus B$, להיות קבוצת כל האיברים ששייכים ל- A אך לא שייכים ל- B . כלומר:

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$$



תרגיל 1.23

קבעו מתי $A \setminus B = B \setminus A$.

פתרון:

ראשית, אם $A = B$, אז:

$$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\} = \{a \in A \mid a \notin A\} = \emptyset$$

ובדומה:

$$B \setminus A = \{b \in B \mid b \notin A\} = \{b \in B \mid b \notin B\} = \emptyset$$

$$A \setminus B = \emptyset = B \setminus A \text{ כלומר}$$

נניח כעת ש- $A \neq B$. מהגדרת שוויון קבוצות, או ש- $A \not\subseteq B$, או ש- $B \not\subseteq A$.
 אם $A \not\subseteq B$, אז קיים $a \in A$ המקיים $a \notin B$. כלומר, $a \in A \setminus B$. אך מכיוון ש- $a \notin B$, $a \notin B \setminus A$.
 בסך הכל, קיבלנו ש- $A \setminus B \neq B \setminus A$. המקרה השני זהה לחלוטין.
 כלומר, ראינו ש- $A \setminus B = B \setminus A$ אם ורק אם $A = B$.

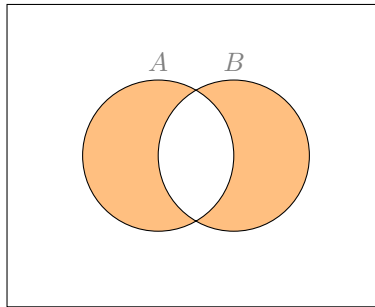
1.2.4 הפרש סימטרי של קבוצות

כפי שראינו, הגדרת הפרש קבוצות איננה סימטרית, ותלויה בסדר הקבוצות. נרצה להגדיר הגדרה סימטרית.

הגדרה 1.24 – (הפרש סימטרי של קבוצות)

בהנתן שתי קבוצות A, B , נגדיר את ההפרש הסימטרי שלהן, $A \Delta B$, להיות קבוצת כל האיברים ששייכים ל- A ואינם שייכים ל- B , או לחילופין שייכים ל- B ואינם שייכים ל- A . כלומר:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



1.25 תרגיל

$$\text{הוכיחו כי } A \Delta B = \underbrace{(A \cup B) \setminus (A \cap B)}_{=C}$$

פתרון:

מהתבוננות בדיאגרמת ון של הפרש סימטרי, אכן נראה שזה המצב. נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית. ראשית נוכיח ש- $A \Delta B \subseteq C$. יהי $x \in A \Delta B$, אז מהגדרת ההפרש הסימטרי והאיחוד, $x \in A \setminus B$ או $x \in B \setminus A$. במקרה הראשון, מהגדרת הפרש קבוצות, $x \in A$ וגם $x \notin B$. לכן מהגדרת איחוד $x \in A \cup B$ ומהגדרת חיתוך $x \notin A \cap B$. מהגדרת הפרש קבוצות נובע $x \in C$. המקרה השני זהה, ובסך הכל $A \Delta B \subseteq C$.

נוכיח כעת ש- $C \subseteq A \Delta B$. יהי $x \in C$. מהגדרת ההפרש, $x \in A \cup B$ וגם $x \notin A \cap B$. מהגדרת האיחוד, $x \in A$ או $x \in B$. נתחיל מהמקרה הראשון. אם $x \in A$, מכיוון ש- $x \notin A \cap B$, נובע $x \notin B$. כלומר, $x \in A \setminus B$, ולכן $x \in A \Delta B$. המקרה השני זהה, ובסך הכל $C \subseteq A \Delta B$. ולסיכום $A \Delta B = C$.

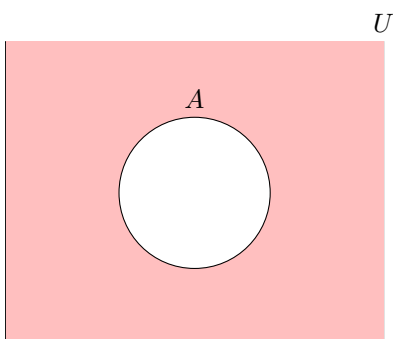
1.2.5 קבוצת המשלים

בכדי לדבר על קבוצת המשלים, נדרש להגדיר משלים ביחס למה. כלומר, נקבע קבוצה U שהיא העולם בו נעבוד. U יכולה להיות קבוצת המספרים הממשיים, קבוצה של קבוצות, קבוצה של פונקציות ועוד. אך לא ניתן להמנע מלהגדיר במפורש מה הוא העולם שלנו.

הגדרה 1.26 – (קבוצה משלימה)

תהא $A \subseteq U$. המשלים של הקבוצה A , אותו נסמן ב- A^c או $\bar{A}$, היא קבוצת כל האיברים שלא שייכים ל- A . כלומר:

$$A^c = \bar{A} = U \setminus A$$



תרגיל 1.27

תהיינה, A, B קבוצות. הוכיחו ש- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

פתרון:

נוכיח באמצעות הכלה דו כיוונית. ראשית נוכיח ש- $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$. יהי $x \in (A \cup B)^c$. אז $x \notin A \cup B$. לכן מהגדרת האיחוד, חייב לנוכח $x \notin A$ אחרת, הוא היה שייך לאיחוד של A עם כל קבוצה. בדומה, $x \notin B$. לכן $x \in A^c$ וגם $x \in B^c$. כלומר $x \in A^c \cap B^c$ ולכן $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$.
נוכיח ש- $(A \cup B)^c \supseteq A^c \cap B^c$. יהי $x \in A^c \cap B^c$. אז $x \in A^c$ ולכן $x \notin A$. בדומה, $x \notin B$. לכן $x \notin A \cup B$, כלומר $x \in (A \cup B)^c$.
בסך הכל הוכחנו ש- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

תרגיל 1.28

תהיינה, A, B קבוצות. הוכיחו ש- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

לשני התרגילים הללו יחד נקרא "כללי דה מורגן".

1.2.6 מכפלה קרטזית

ציינו קודם שבקבוצה אין חשיבות לסדר האיברים, ו- $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. אך לפעמים יש חשיבות לציין את סדר האיברים. זה מוביל אותנו למושג הבא.

הגדרה 1.29 – (זוגות סדורים)

בהנתן שני איברים a, b , נגדיר את הזוג הסדור (a, b) , להיות אוסף של שני האיברים, עם חשיבות לסדר שלהם. נאמר ש- $(a, b) = (c, d)$ אם $a = c$ וגם $b = d$.

דוגמה 1.30

על הקבוצה:

$$\{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

נוכל לחשוב בגרף של הישר $y = 2x + 1$.

הגדרה 1.31 – (מכפלה קרטזית)

בהנתן שתי קבוצות A, B , נגדיר את המכפלה הקרטזית שלהן, $A \times B$, להיות קבוצת כל הזוגות הסדורים שהקואורדינטה השמאלית שלהם שייכת ל- A , והקואורדינטה הימנית שלהם שייכת ל- B . כלומר:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ וגם } b \in B\}$$

הערה

לכל שתי קבוצות A, B מתקיים:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

תרגיל 1.32

תהיינה A, B, C, D קבוצות כלשהן. הוכיחו / הפריכו. אם $A \times B = C \times D$ אז בהכרח $A = C$ וגם $B = D$.

פתרון:

כאשר נגש לפתור טענת הוכחה או הפרכה, מומלץ לנסות ראשית לבחון את הטענות על מספר דוגמאות פשוטות. במידה ומדובר בטענת הפרכה, אולי אחת מהדוגמאות הללו תעיד על כך שהטענה איננה נכונה. בכל מקרה, הדוגמאות יכולות לסייע לנו להבין את האובייקטים בהם מתמקד התרגיל. לאחר בחינת הדוגמאות, מומלץ לנסות להוכיח את הטענה בזהירות. בשלב מסוים אנחנו אולי נגיע לטענה שנרצה לטעון, אך לא נצליח להצדיק מדוע היא בהכרח מתקיימת. נקודות כאלה עלולות להעיד על כך שמדובר בתרגיל הפרכה, ולכוון אותנו לכיוון דוגמה נגדית. נבחן את שיטה זו.

ננסה להוכיח את הטענה. נתחיל מלהוכיח ש- $A = C$. ראשית נוכיח ש- $A \subseteq C$. יהי $a \in A$. נרצה להראות ש- $a \in C$.

נבחר $b \in B$, ונסתכל על הזוג (a, b) . מכיוון ש- $a \in A$ ו- $b \in B$, $(a, b) \in A \times B$. נובע $(a, b) \in C \times D$. לכן מהגדרת המכפלה הקרטזית, $a \in C$ כדרוש.

אם הרגשנו שהוכחנו את ההוכחה כראוי, סימן שלא נזהרנו! מהי הבעיה? בשלב בו אמרנו שנבחר $b \in B$, בפרט קבענו שקיים $b \in B$. אך מה אם $B = \emptyset$? במקרה הזה לא נוכל לבחור b כזה. ננסה להשתמש בתובנה האחרונה כדי למצוא דוגמה נגדית. נגדיר $B = C = \emptyset$, $A = D = \{1\}$. נבחין ש-

$$A \times B = \emptyset = C \times D$$

אך כמובן $A \neq C$ ו- $B \neq D$. מצאנו דוגמה נגדית לטענה ולכן הפרכנו אותה.

תרגיל 1.33

תהיינה A, B, C, D קבוצות לא ריקות כלשהן. הוכיחו / הפריכו. אם $A \times B = C \times D$ אז בהכרח $A = C$ וגם $B = D$.

פתרון:

כעת, מכיוון ש- $B \neq \emptyset$, אנחנו באמת נוכל לבחור $b \in B$ כפי שעשינו בפתרון השגוי הקודם. המשך ההוכחה תקין ומאפשר לנו להסיק ש- $A \subseteq C$. את ההכלה $C \subseteq A$ וכן השוויון $B = D$ נוכיח בדיוק באותה הצורה.

1.3 מבוא ללוגיקה מתמטית

במתמטיקה, נרצה להוכיח טענות ומשפטים. משמעות הדבר, היא להניח הנחות מסויימות, ממנה להסיק מסקנה, ממנה להסיק מסקנה נוספת וכן הלאה. אבני הבניין, או האטומים בלוגיקה מתמטית, הם הפסוקים הבסיסיים, כגון "התלמידה הצליחה במבחן", או " n הוא מספר טבעי". בדומה לדוגמה השניה, פסוקים בסיסיים יכולים להיות תלויים בהשמה (מי הוא המספר n ?). לכל השמה הפסוק יכול להיות פסוק אמת (למשל אם $n = 1$) או פסוק שקר (למשל אם $n = \frac{1}{2}$). באמצעות פסוקים בסיסיים, ניתן לבנות פסוקים מורכבים יותר. גם פסוקים אלו, יכולים להיות פסוקי אמת או שקר. בניית הפסוקים תתבצע באמצעות קשרים לוגיים.

1.3.1 קשרים לוגיים

נקבע שני פסוקים, ונסמנם ב- p, q . נחלק את העולם לארבעה מצבים, על פי אמיתות ושקריות כל אחד מהפסוקים.

מצב	p	q
I	אמת	אמת
II	אמת	שקר
III	שקר	אמת
IV	שקר	שקר

כעת, נציג את הקשרים הלוגיים.

כמת לוגי	סימן	יישום	מתי היישום הוא פסוק אמת?	כיצד לקרוא את היישום?
שלילה	$\neg$	$\neg p$	III, IV	לא p / p לא נכון
או	$\vee$	$p \vee q$	I, II, III	p או q
וגם	$\wedge$	$p \wedge q$	I	p וגם q
גרירה (אם - אז)	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$	I, III, IV	אם p אז q / q גורר p
שקילות (אם ורק אם)	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$	I, IV	p אם ורק אם q / q ו- p שקולים

הערה

1. נבחין שבגרירה, כאשר הפסוק שלפני החץ (נקרא רישא, במקרה שלנו p) שקרי, טענת הגרירה תהיה אמת, ללא תלות בפסוק שאחרי החץ (נקרא סיפא, במקרה שלנו q). מדוע? אם יגש אלינו אדם ויגיד: "אם יורד מהשמיים גשם של תפוזים, אז שמי הוא מתושלח", אנחנו לא נקרא לו שקר, בין אם שמו מתושלח או לאו. זאת מכיוון שלא יורד מהשמיים גשם של תפוזים, והוא התנה את דבריו רק באפשרות שגשם כזה אכן יורד.

מכיוון שפסוק לוגי חייב להיות אמת או שקר, וביססנו שהפסוק איננו שקרי, מדובר בפסוק אמת.

2. פסוק 'אם ורק אם' מקבל ערך אמת כאשר שני הפסוקים הם אמת או שקר יחדיו. במקרה הזה נגיד שאלו פסוקים שקולים.

דוגמה מוכרת לפסוקים שקולים: כל פסוק p שקול לפסוק $p \vee \neg p$.

דרך נוספת להסתכל על טענת אם ורק אם, היא $q \Rightarrow p$ וגם $p \Rightarrow q$.

כאשר נתקל בטענת אם ורק אם אותה נתבקש להוכיח, חשוב לזכור להוכיח את שני כיווני הגרירה.

טענה

נניח ש- $q \Rightarrow p$. הוכיחו שמכך נובע שהפסוק הלוגי $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ הוא אמת. לגרירה $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ נקרא זהות הקונטרה פוזיטיב של $q \Rightarrow p$.

הוכחה

נניח בשלילה שהפסוק $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$ הוא שקרי. משמעות הדבר היא שהרישא היא אמת והסיפא שקרית. כלומר, $\neg q$ אמת ו- $\neg p$ שקר. מכך נובע ש- p פסוק אמת. מכיוון שהנחנו ש- $q \Rightarrow p$, נובע ש- q אמת. אך לא ייתכן שגם q וגם $\neg q$ הם אמת. כלומר הגענו לסתירה. לכן נסיק ש- $(\neg p) \Rightarrow (\neg q)$.

דוגמה 1.34

דוגמה מוכרת לזהות הקונטרה פוזיטיב היא בשיר "לכובע שלי שלוש פינות". בהנחת כובע x , נאמר שמתקיים $p(x)$ כאשר x הוא הכובע שלי. כמו כן, נאמר שמתקיים $q(x)$ אם לכובע x יש שלוש פינות. בשיר נאמר "לכובע שלי שלוש פינות". כלומר, אם x הוא הכובע שלי, אז x -ל שלוש פינות. או באופן שקול:

$$p(x) \Rightarrow q(x)$$

בסוף השיר נאמר "לולא היו לו שלוש פינות, לא היה הוא הכובע שלי". כלומר, אם x הוא ללא שלוש פינות, אז x הוא הכובע שלי. באופן שקול:

$$\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)$$

תרגיל 1.35

יהי $n \in \mathbb{N}$. נניח ש- n^2 מספר זוגי. הוכיחו ש- n זוגי.

פתרון:

נתבקשנו להוכיח את הגרירה $(n \text{ זוגי}) \Rightarrow (n^2 \text{ זוגי})$. נוכיח את הקונטרה פוזיטיב של טענה זו. כלומר, נוכיח $\neg (n^2 \text{ זוגי}) \Rightarrow \neg (n \text{ זוגי})$. במילים, נוכיח שאם n אי זוגי, אז n^2 אי זוגי. אם n אי זוגי, אז $n - 1$ הוא מספר זוגי, ולכן ניתן להציגו בצורה $n - 1 = 2k$ כאשר $k \geq 0$ מספר שלם. כלומר $n = 2k + 1$ לכן:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$$

מכיוון ש- $k \geq 0$ שלם, גם $2k^2 + 2k \geq 0$ שלם. כלומר, קיבלנו שאכן n^2 מספר אי זוגי. בסה"כ הוכחנו את טענת הקונטרה פוזיטיב שרצינו להוכיח.

הערה

הזכרנו שניתן להסתכל על טענת $q \Leftrightarrow p \Leftrightarrow q$ כ- $p \Rightarrow q$ וגם $p \Rightarrow q$.
בשימוש בקונטרה פוזיטיב, דרך נוספת להתבונן בטענת אם ורק אם היא $q \Rightarrow p$ וגם $\neg q \Rightarrow \neg p$.

1.3.2 כמתים לוגים

כלי נוסף לכתיבת פסוקים מורכבים וטענות מתמטיות, הוא שימוש בכמתים לוגים. בכמתים הללו השתמשנו כבר בעבר. נגדיר אותם כעת באופן מסודר.

הגדרה 1.36 – (לכל וקיים)

1. הכמת לכל, יסומן על ידי $\forall$, ונשתמש בו כאשר נרצה לכתוב פסוק על כל אובייקט שמקיים תכונה מסויימת.
2. הכמת קיים, יסומן על ידי $\exists$, ונשתמש בו כאשר נרצה לכתוב פסוק על קיום אובייקט שמקיים תכונה מסויימת.

הערה

משפטים אשר כתובים באמצעות הכמתים והקשרים הלוגיים, ולא במילים, נקראים משפטים מוצרנים. את המשפטים המוצרנים נקרא משמאל לימין.

1.37 תרגיל

תרגמו למילים את המשפטים המוצרנים הבאים:

1. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$
2. $\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$
3. $\forall a, b \in \mathbb{R} : b > a \Leftrightarrow (\exists \varepsilon > 0, b - a > \varepsilon)$

פתרון:

1. A מוכל ב- B אם ורק אם לכל x , אם x שייך ל- A , אז x שייך ל- B .
2. לכל n טבעי, קיים m טבעי כך ש- $m > n$.
3. לכל a, b ממשיים, b גדול מ- a , אם ורק אם קיים ε חיובי כך ש- $b - a$ גדול מ- ε .

1.38 תרגיל

הוכיחו את הטענות המוצרנות מהתרגיל הקודם.

1.4 תבניות הוכחה

לסיכום הפרק הראשון, נציג מספר תבניות הוכחה שברובן כבר השתמשנו, ונשתמש עוד הרבה לאורך הקורס.

1.4.1 טענת לכל

טענת לכל, היא טענה בה נדרש להוכיח או להפריך שכל אובייקט שמקיים את תכונה p מקיים את תכונה q . למעשה, טענת לכל היא טענת גרירה: אם אובייקט מקיים את תכונה p אז הוא מקיים את תכונה q . אם נרצה להוכיח את הטענה, נקח אובייקט כללי, ונניח שהוא מקיים רק את תכונה p , ונראה שמכך נובע שהוא מקיים את תכונה q . חשוב מאוד להזהר לא להניח הנחות נוספות לגבי האובייקט. אם נרצה להפריך טענת לכל, נדרש למצוא דוגמה לאובייקט אשר מקיים את תכונה p אך לא מקיים את תכונה q . מספיק שמצאנו דוגמה אחת כזו, כדי להוכיח שטענת ה-"לכל" איננה נכונה.

דוגמה 1.39

הוכיחו שכל מספר טבעי עם ספרת אחדות 5, מתחלק ב-5 ללא שארית.

1.4.2 טענת קיים

טענת קיים, היא טענה בה נדרש להוכיח או להפריך קיום של אובייקט שמקיים את תכונה p . אם נרצה להוכיח טענת קיים, נדרש להציג דוגמה של אובייקט שמקיים את תכונה p . אם נרצה להפריך טענת קיים, נדרש להראות שתכונה p לא יכולה להתקיים. כלומר, שכל אובייקט בעולם לא מקיים את תכונה p .

דוגמה 1.40

הוכיחו שקיים מספר שספרת האחדות שלו שונה מ-5, אך הוא מתחלק ב-5.

1.4.3 הכלה חד כיוונית

טענת הכלה חד כיוונית, היא טענה בה נתונות לנו שתי קבוצות A, B ואנחנו נתבקש להוכיח או להפריך ש- $A \subseteq B$. אם ברצוננו להוכיח את הטענה, עלינו להראות שכל $x \in A$ מקיים $x \in B$. אם ברצוננו להפריך את הטענה, עלינו להראות שקיים איבר $x \in A$ שמקיים $x \notin B$. למעשה, טענת הכלה חד כיוונית היא טענת "לכל" הבאה:

$$\forall x \in A : x \in B$$

1.4.4 שוויון קבוצות

טענת שוויון קבוצות, היא טענה בה נתונות לנו שתי קבוצות A, B , ואנחנו נתבקש להוכיח או להפריך ש- $A = B$. אם ברצוננו להוכיח את הטענה, עלינו להוכיח ששתי ההכלות $A \subseteq B$ ו- $B \subseteq A$ מתקיימות. אם ברצוננו להפריך את הטענה, עלינו להראות שלפחות אחת משתי ההכלות לא מתקיימת.

1.4.5 הוכחה בדרך השלילה

כאשר נרצה להוכיח טענה בדרך השלילה, נניח את נתוני הטענה, ובנוסף להם, נניח את שלילת מסקנת הטענה. לאחר מכן, נראה שמכל ההנחות הללו יחד, נובעת סתירה לוגית.

תרגיל 1.41

הוכיחו ש- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

פתרון:

נניח בשלילה ש- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. אז מכיוון שהוא מספר חיובי, ניתן לכתוב $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ כאשר $m, n \in \mathbb{N}$. כמו כן, נבחר את m, n כך שהשבר $\frac{m}{n}$ הוא שבר מצומצם. מכיוון ש- $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, אחרי העלאה בריבוע, נקבל $2 = \frac{m^2}{n^2}$ ולכן $2n^2 = m^2$. מכיוון שאגף שמאל הוא מספר זוגי, כך אגף ימין. כלומר m^2 מספר זוגי. מתרגיל קודם שפתרנו, מכך נובע ש- m זוגי. לכן קיים $k \in \mathbb{N}$ עבורו $m = 2k$. נציב זאת במשוואה שקיבלנו קודם ונקבל:

$$2n^2 = m^2 \implies 2n^2 = 4k^2 \implies n^2 = 2k^2$$

מאותו טיעון, נסיק ש- n מספר זוגי. כלומר m, n זוגיים. אך זו סתירה לכך שהשבר $\frac{m}{n}$ מצומצם. כלומר, ההנחה $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ שגויה.

1.5 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
5	7.9.17
5*	12.1.18
7*	12.1.18
5	2.8.18
5	16.9.18
4	6.8.19
1	30.10.20
1	7.5.21
1	23.7.21
2	8.4.22
3*	1.3.24
2	12.7.24
1	20.9.24

2 פונקציות

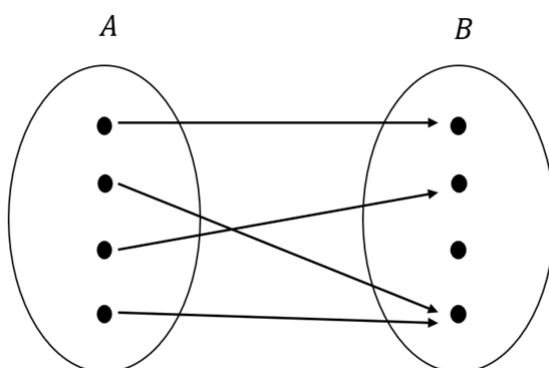
את מושג הפונקציה הכרנו כבר בבית הספר. נגדיר אותו כעת באופן מתמטי פורמלי.

2.1 הגדרות וסימונים

הגדרה 2.1 – (פונקציה)

תהיינה A, B קבוצות. פונקציה f מ- A ל- B , היא כלל שמתאים לכל $a \in A$ איבר יחיד $b \in B$.
נסמן $f : A \rightarrow B$.

יחס מלא
חד ערכיות



הגדרה 2.2 – (תחום, טווח)

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה.

1. לקבוצה A נקרא התחום של הפונקציה.

2. לקבוצה B נקרא הטווח של הפונקציה.

הגדרה 2.3 – (תמונה ומקור)

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה.

יהי $a \in A$. נניח ש- $f(a) = b$.

ל- b נקרא התמונה של a .

ל- a נקרא המקור של b .

מתנאי היחס המלא, לכל $a \in A$ קיימת תמונה. מתנאי החד ערכיות, התמונה היא יחידה.

דוגמה 2.4

תהא $A = \{a, b, c\}$. תהא $B = \{1, 2, 3\}$. נגדיר את הפונקציה $f : A \rightarrow B$:

$$\begin{aligned} a &\xrightarrow{f} 1 \\ b &\xrightarrow{f} 1 \\ c &\xrightarrow{f} 2 \end{aligned}$$

כלומר $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 2$. ניתן לכתוב את הפונקציה בכתיב נוסף, כקבוצת זוגות סדורים:

$$f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$$

דוגמה 2.5

תהא $A = \{a, b, c\}$. תהא $B = \{1, 2\}$. נגדיר את ההתאמה:

$$g = \{(a, 1), (a, 2), (c, 2)\}$$

נבחין ש- g איננה פונקציה מ-2 סיבות:

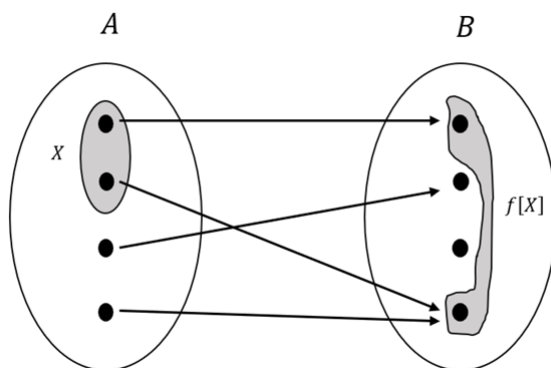
1. g איננה יחס מלא. לא מוגדרת תמונה ל- b .
2. g איננה חד ערכית. ל- a מוגדרות שתי תמונות.

הגדרה 2.6 – (תמונה של קבוצה)

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. תהא $X \subseteq A$. התמונה של X תחת f תסומן על ידי $f[X]$, היא הקבוצה:

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} = \{b \in B \mid \exists x \in X : f(x) = b\}$$

כלומר, קבוצת התמונות של איברי X .



הערה

לקבוצה $f[A]$ נקרא גם התמונה של הפונקציה f ומסומנת לפעמים על ידי $\text{Im}(f)$. נשים לב שהתמונה של הפונקציה תמיד מוכלת בטווח שלה, אך לא תמיד שווה לה.

דוגמה 2.7

תהא $A = \{a, b, c\}$. תהא $B = \{1, 2, 3\}$. נזכר בפונקציה $f : A \rightarrow B$:

$$a \xrightarrow{f} 1$$

$$b \xrightarrow{f} 1$$

$$c \xrightarrow{f} 2$$

תהא $X = \{a, b\}$. מתקיים:

$$f[X] = \{f(a), f(b)\} = \{1\}$$

כמו כן:

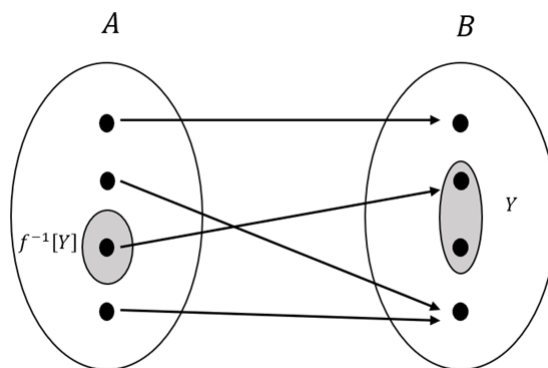
$$f[A] = \{f(a), f(b), f(c)\} = \{1, 2\}$$

הגדרה 2.8 – (תמונה הפוכה)

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. תהא $Y \subseteq B$. התמונה ההפוכה של Y ביחס ל- f , תסומן על ידי $f^{-1}[Y]$, היא הקבוצה:

$$f^{-1}[Y] = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

התמונה ההפוכה של Y תקרא גם קבוצת המקורות של Y ביחס ל- f .



דוגמה 2.9

תהא $A = \{a, b, c\}$. תהא $B = \{1, 2, 3\}$. נזכר שוב בפונקציה $f : A \rightarrow B$:

$$a \xrightarrow{f} 1$$

$$b \xrightarrow{f} 1$$

$$c \xrightarrow{f} 2$$

תהיינה $Y = \{1\}$, $Z = \{3\}$.

$$f^{-1}[Y] = \{a, b\}$$

$$f^{-1}[Z] = \emptyset$$

משפט 2.10

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. תהיינה $X \subseteq A$ ו- $Y \subseteq B$ קבוצות.

1.

$$f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$$

2.

$$X \subseteq f^{-1}[f[X]]$$

הוכחה

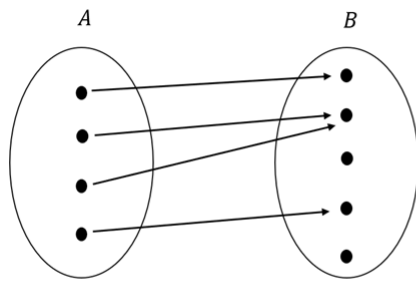
נוכיח את החלק הראשון, הוכחת החלק השני דומה, ותושאר כתרגיל.
יהי $b \in f[f^{-1}[Y]]$. מהגדרת התמונה, קיים $a \in f^{-1}[Y]$ כך ש- $b = f(a)$. מכיוון ש- $a \in f^{-1}[Y]$, $a \in f^{-1}[Y]$ מהגדרת התמונה ההפוכה, $b = f(a) \in Y$. כלומר קיבלנו בסך הכל ש- $b \in Y$ ולכן $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$ כפי שרצינו להוכיח.

הגדרה 2.11 – (פונקציה חח"ע)

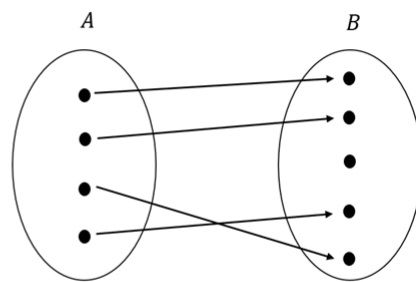
תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. f תקרא חד חד ערכית (חח"ע), אם לכל $a_1, a_2 \in A$ אם $a_1 \neq a_2$ אז $f(a_1) \neq f(a_2)$.

במילים, לכל שני איברים שונים בתחום, יש תמונה שונה.

על ידי שימוש בקונטרה פוזיטיב, נקבל הגדרה שקולה. לכל $a_1, a_2 \in A$ אם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$.



פונקציה לא חח"ע



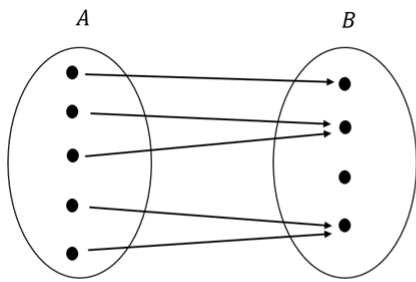
פונקציה חח"ע

דוגמה 2.12

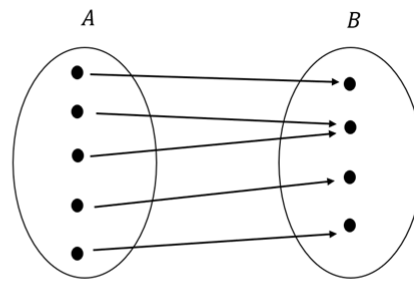
הפונקציה $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ המוגדרת על ידי $f(n) = n + 1$ היא חח"ע. יהיו $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$. נניח ש- $a_1 \neq a_2$. אז גם $a_1 + 1 \neq a_2 + 1$. כלומר $f(a_1) \neq f(a_2)$. לכן f אכן חח"ע.

הגדרה 2.13 – (פונקציה על B)

תהא $f: A \rightarrow B$ פונקציה. f תקרא על B , אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש- $f(a) = b$. במילים אחרות, f תקרא פונקציה על הטווח שלה, אם התמונה שלה שווה לטווח.



פונקציה לא על



פונקציה על

דוגמה 2.14

הפונקציה $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x + 1$ היא פונקציה על $\mathbb{Z}$. יהי $b \in \mathbb{Z}$. נגדיר $a = b - 1$. אז:

$$f(a) = a + 1 = b - 1 + 1 = b$$

כלומר $b \in \text{Im}(f)$. הראנו שכל איבר מהטווח של f שייך לתמונה ולכן f היא על.

תרגיל 2.15

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו האם הן חח"ע והאם הן על הטווח שלהן.

$$1. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 1$$

$$2. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$3. f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

$$4. f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$f(x) = x^2$$

פתרון:

1. f איננה חח"ע. זאת מכיוון ש- $1 \neq 0$ אבל $f(0) = f(1) = 1$.
כמו כן, f איננה על. זאת מכיוון ש- $2 \in \mathbb{R}$ אך לא קיים $x \in \mathbb{R}$ עבורו $f(x) = 2$.

2. f חח"ע. נראה זאת באמצעות טענת הקונטרה פוזיטיב. יהיו $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, ונניח ש- $f(a_1) = f(a_2)$. עלינו להוכיח ש- $a_1 = a_2$. אכן:

$$a_1 = f(a_1) = f(a_2) = a_2$$

ו- f חח"ע.

נוכיח ש- f על. יהי $b \in \mathbb{R}$. נבחר $a = b$. אז $f(a) = b$ ולכן f על.

3. f לא חח"ע. זאת מכיוון ש- $1 \neq -1$ אבל $f(-1) = 1 = f(1)$.
כמו כן, f לא על. זאת מכיוון שלא קיים $x \in \mathbb{R}$ עבורו $f(x) = -1$.

4. f חח"ע. אכן, יהיו $a_1, a_2 \in [0, \infty)$, ונניח ש- $a_1^2 = a_2^2$. מכך נובע ש- $a_1 = \pm a_2$. מכיוון ש- $a_1, a_2 \geq 0$, מספרים חיוביים, נובע $a_1 = a_2$.
 f על לכל $y \in [0, \infty)$ מכיוון ש- y חיובי, המספר $x = \sqrt{y}$ מוגדר, ומתקיים $f(x) = y$.

משפט 2.16

תהא $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

1. אם f חח"ע, אז לכל $X \subseteq A$:

$$X = f^{-1}[f[X]]$$

2. אם f על, אז לכל $Y \subseteq B$:

$$Y = f[f^{-1}[Y]]$$

משפט 2.17

תהיינה A, B קבוצות סופיות, ותהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה.

1. אם f חח"ע, אז $|A| \leq |B|$.
2. אם f על B , אז $|A| \geq |B|$.
3. אם f חח"ע ועל B , $|A| = |B|$.

2.2 פונקציות חשובות

נכיר כעת מספר פונקציות ומשפחות פונקציות חשובות.

2.2.1 פונקציה ממשית

הגדרה 2.18 – (פונקציה ממשית)

תהיינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$. פונקציה $f : A \rightarrow B$ תקרא פונקציה ממשית. כלומר, f נקראת פונקציה ממשית אם התחום והטווח שלה הן תתי קבוצות של המספרים הממשיים.

הערה

בהנחת פונקציה ממשית, f , לעיתים נרשום לנוחות $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. הבעיה בכתיב כזה, היא שלעיתים f לא תהיה מוגדרת לכל מספר ממשי. כדי להתמודד עם הבעיה הזאת, נגדיר את מושג תחום ההגדרה.

הגדרה 2.19 – (תחום ההגדרה)

תהא f פונקציה ממשית. תחום ההגדרה של f הוא הקבוצה:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ מוגדר היטב ומספר ממשי} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

כלומר, תחום ההגדרה היא קבוצת כל המספרים הממשיים עליהם ניתן להגדיר את הפונקציה.

דוגמה 2.20

תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה הממשית המוגדרת על ידי:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

ידוע לנו עוד מימי בית הספר שלא ניתן לחלק ב-0. כלומר, הפונקציה לא מוגדרת עבור $x = 0$. עם זאת, לכל $x \neq 0$, הפונקציה מוגדרת היטב. לכן תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.2.2 הפונקציה הקבועה

הגדרה 2.21 – (הפונקציה הקבועה)

תהיינה A, B קבוצות ו- $b \in B$. הפונקציה הקבועה $c_b : A \rightarrow B$ היא הפונקציה:

$$c_b(a) = b$$

2.22 תרגיל

1. הפונקציה הקבועה היא על, אם ורק אם $|B| = 1$.

2. הפונקציה הקבועה היא חח"ע אם ורק אם $|A| = 1$.

2.2.3 פונקציית הזהות

הגדרה 2.23 – (פונקציית הזהות)

תהא A קבוצה. פונקציית הזהות, היא הפונקציה $\text{Id}_A : A \rightarrow A$ המוגדרת על ידי:

$$\text{Id}_A(a) = a$$

2.24 דוגמה

כאשר $A = \mathbb{R}$, פונקציית הזהות $\text{Id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא הישר $y = x$.

2.2.4 פונקציית האינדקטור

הגדרה 2.25 – (פונקציית האינדקטור)

תהא A קבוצה, ו- $X \subseteq A$. פונקציית האינדקטור של X (או בעברית, הפונקציה המציינת של X), תסומן על ידי $\mathbb{1}_X : A \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\mathbb{1}_X(a) = \begin{cases} 1 & a \in X \\ 0 & a \notin X \end{cases}$$

2.26 דוגמה

תהא $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ו- $X = \{1, 4\}$. הפונקציה $\mathbb{1}_X : A \rightarrow \{0, 1\}$ היא הפונקציה:

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_X(1) &= 1 & \mathbb{1}_X(2) &= 0 \\ \mathbb{1}_X(3) &= 0 & \mathbb{1}_X(4) &= 1 \end{aligned}$$

2.27 תרגיל

תהא $X \subseteq A$.

1.

$$\mathbb{1}_X^{-1}[\{1\}] = X$$

2.

$$\mathbb{1}_X^{-1}[\{0\}] = A \setminus X$$

2.2.5 תמורות

2.28 – הגדרה ($[n]$)

יהי $n \in \mathbb{N}$ נסמן ב-

$$[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

2.29 – הגדרה (תמורה)

יהי $n \in \mathbb{N}$. תמורה על n היא פונקציה $\sigma : [n] \rightarrow [n]$ חח"ע ועל $[n]$. נסמן ב- S_n את קבוצת התמורות על n .

2.30 דוגמה

נרשום את כל התמורות על 3:

$$\begin{array}{lll} \sigma_1(1) = 1 & \sigma_2(1) = 1 & \sigma_3(1) = 2 \\ \sigma_1(2) = 2 & \sigma_2(2) = 3 & \sigma_3(2) = 1 \\ \sigma_1(3) = 3 & \sigma_2(3) = 2 & \sigma_3(3) = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \sigma_4(1) = 2 & \sigma_5(1) = 3 & \sigma_6(1) = 3 \\ \sigma_4(2) = 3 & \sigma_5(2) = 1 & \sigma_6(2) = 2 \\ \sigma_4(3) = 1 & \sigma_5(3) = 2 & \sigma_6(3) = 1 \end{array}$$

סה"כ 6 תמורות.

הערה

בדומה לדוגמה, תמיד מתקיים

$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

נדבר על זה בהרחבה בפרק על קומבינטוריקה.

2.2.6 פונקציית הערך המוחלט

פונקציית הערך המוחלט היא פונקציה ממשית מיוחדת, שנשתמש בה הרבה.

הגדרה 2.31 – (הערך המוחלט)

פונקציית הערך המוחלט $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא הפונקציה:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

לפונקציית הערך המוחלט קיימת גם פרשנות גיאומטרית. הערך המוחלט של המספר הממשי x הוא המרחק של x מהמספר 0. קבוצת המספרים:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 3\}$$

היא קבוצת כל המספרים הממשיים שמרחק מ-0 הוא 3. ישנם שני מספרים כאלו: $3, -3$.

2.3 פעולות ויחסים בין פונקציות

בהנתן שתיים (או יותר) פונקציות, נוכל לייצר מהן פונקציות חדשות, או לתהות לגבי הקשר ביניהן.

2.3.1 שוויון פונקציות

הגדרה 2.32 – (שוויון פונקציות)

תהיינה $f : A \rightarrow B$ ו- $g : C \rightarrow D$ פונקציות. נאמר ש- $f = g$ אם:

$$1. A = C$$

$$2. B = D$$

$$3. \forall x \in A = C : f(x) = g(x)$$

הערה

לעיתים נשמיט את תנאי 2.

2.3.2 פעולות על התחום והטווח של פונקציה

הגדרה 2.33 – (צמצום תחום של פונקציה)

תהיינה A, B קבוצות ותהא $X \subseteq A$. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. נגדיר את הצמצום של f לתחום X , $f|_X : X \rightarrow B$, על ידי:

$$f|_X(x) = f(x)$$

דוגמה 2.34

בתרגיל שפתרנו בעבר, ראינו שהפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$ איננה חח"ע. נגדיר $X = [0, \infty)$. ראינו שהצמצום של f ל- X , $f|_X$ היא פונקציה חח"ע.

הגדרה 2.35 – (צמצום טווח)

תהיינה A, B קבוצות ותהא $\text{Im}(f) \subseteq Y \subseteq B$. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. נגדיר פונקציה חדשה, $g : A \rightarrow Y$ על ידי:

$$g(x) = f(x)$$

זו אותה פונקציה, עם טווח מצומצם.

הערה

חשוב לשים לב שניתן להגדיר צמצום טווח של פונקציה, רק אם הקבוצה אליה צמצמנו את הטווח מכילה את התמונה של הפונקציה המקורית. לרוב נצמצם את הטווח לתמונה של הפונקציה.

דוגמה 2.36

בחזרה לדוגמה הקודמת, הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^2$ איננה על. לעומת זאת, אחרי צמצום הטווח ל- $X = [0, \infty)$, הפונקציה $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ המוגדרת על ידי $g(x) = x^2$ היא פונקציה על.

משפט 2.37

תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. נסמן $Y = \text{Im}(f)$. נתבונן בפונקציה $g : A \rightarrow Y$ המוגדרת על ידי:

$$g(x) = f(x)$$

g היא על.

2.3.3 פעולות על פונקציות ממשיות

יהיו $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ שתי פונקציות ממשיות. נגדיר באמצעותן ובאמצעות פעולות חשבוניות פונקציות חדשות.

הגדרה 2.38 – (פעולות חשבוניות על פונקציות ממשיות)

1. הפונקציה $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, מוגדרת על ידי:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

2. הפונקציה $f - g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, מוגדרת על ידי:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

3. הפונקציה $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, מוגדרת על ידי:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

4. נניח שלכל $x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0$. נגדיר את הפונקציה $\frac{f}{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, על ידי:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

דוגמה 2.39

תהיינה $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרות על ידי:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^2 + 1$$

אז:

1.

$$f + g = x^2 + x^2 + 1 = 2x^2 + 1$$

2.

$$f - g = x^2 - (x^2 + 1) = -1$$

3.

$$f \cdot g = x^2 \cdot (x^2 + 1) = x^4 + x^2$$

4. מכיוון ש- $g(x) \neq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ניתן להגדיר:

$$\frac{f}{g} = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

2.4 הרכבת פונקציות ופונקציה הופכית

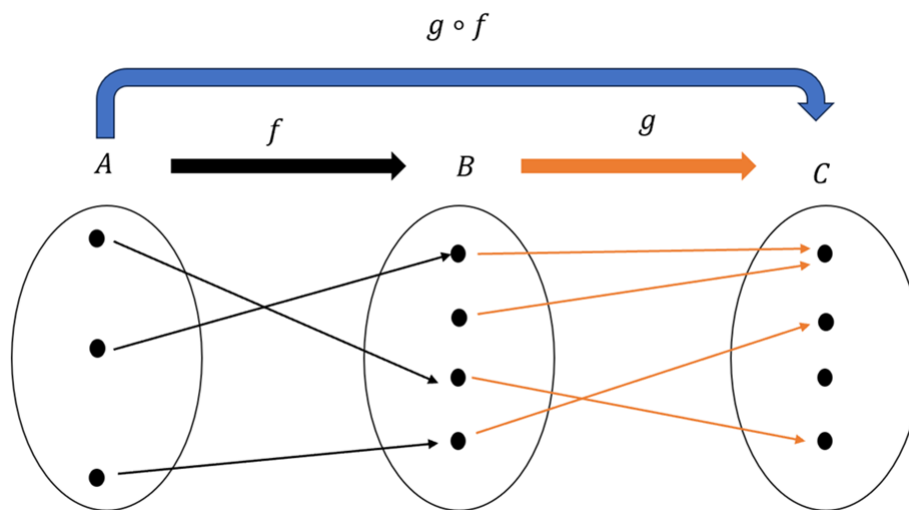
פעולה נוספת שניתן להגדיר על פונקציות, היא פעולת ההרכבה.

הגדרה 2.40 – (הרכבת פונקציות)

תהא $f : A \rightarrow B$ ו- $g : C \rightarrow D$. נניח ש- $B \subseteq C$ ונגדיר את הפונקציה $g \circ f : A \rightarrow D$ על ידי:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

אינטואיטיבית, הפונקציה f לוקחת איבר מ- A ושלחת אותו לאיבר ב- B . מכיון ש- $B \subseteq C$, הפונקציה g יודעת לשלוח את $f(x)$ לאיבר D . אז, הפונקציה $g \circ f$ שולחת את האיבר x לאיבר $g(f(x))$.



דוגמה 2.41

תהיינה $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרות על ידי:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x + 1$$

אז:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$

משפט 2.42

תהיינה $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ פונקציות.

1. אם $g \circ f$ חח"ע, אז f חח"ע.

2. אם $g \circ f$ על C , אז g על C .

הוכחה

1. יהיו $a_1, a_2 \in A$. נניח ש- $a_1 \neq a_2$. מכיוון ש- $g \circ f$ חח"ע, נובע מכך ש- $g(f(a_1)) \neq g(f(a_2))$.
 g היא פונקציה ולכן חד ערכית. לכן לא ייתכן ש- $f(a_1) = f(a_2)$, שכן מכך היה נובע $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$.
 לכן $f(a_1) \neq f(a_2)$ ו- f חח"ע.

2. נשאר כתרגיל.

באמצעות מושג ההרכבה, נוכל להגדיר כעת מושגים חשובים מאוד בנושא הפונקציות, פונקציה הפיכה ופונקציה הופכית.

הגדרה 2.43 – (פונקציה הפיכה)

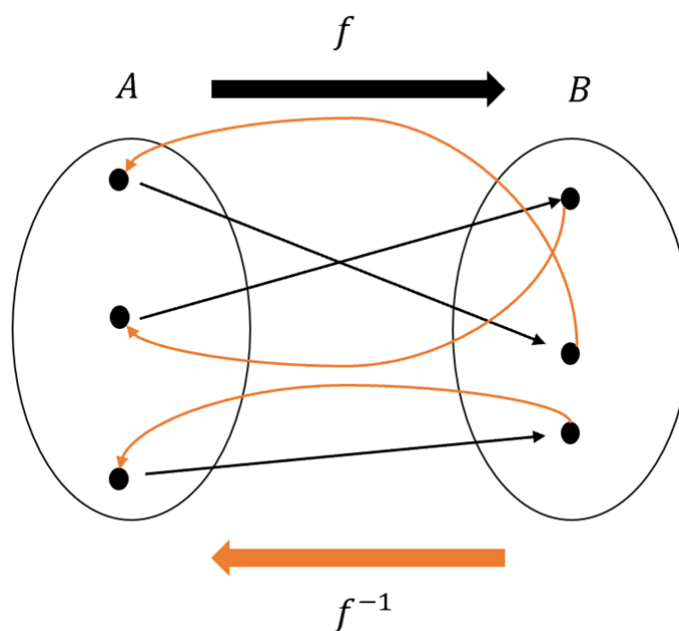
תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. f תקרא הפיכה אם קיימת פונקציה $g : B \rightarrow A$ עברה מתקיים:

$$g \circ f = \text{Id}_A$$

$$f \circ g = \text{Id}_B$$

הפונקציה g תקרא הפונקציה ההופכית של f , ותסומן לרוב ב- f^{-1} .

אינטואיטיבית, הפונקציה f , לוקחת איבר $x \in A$ ושולחת אותו לאיבר $f(x) \in B$. הפונקציה f^{-1} לוקחת את $f(x)$ ומשחזרת מי הוא x .



דוגמה 2.44

יהיו $a, b \in \mathbb{R}$, ונניח ש- $a \neq 0$. נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = ax + b$. נחשב את f^{-1} . הפונקציה f^{-1} צריך לקבל איבר $y \in \mathbb{R}$, ולשלוח אותו לאיבר $x \in \mathbb{R}$ עבורו מתקיים, $f(x) = y$. כלומר, צריך להתקיים:

$$ax + b = y \implies ax = y - b \xRightarrow{a \neq 0} x = \frac{y - b}{a}$$

נגדיר את הפונקציה $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $g(y) = \frac{y-b}{a}$.
לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(ax + b) = \frac{ax + b - b}{a} = x$$

כמו כן לכל $y \in \mathbb{R}$:

$$(f \circ g)(y) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b = y$$

כלומר, f הפיכה ו- $f^{-1} = g$.

משפט 2.45

תהא $f: A \rightarrow B$ פונקציה. התנאים הבאים שקולים (כלומר, תנאי 1 מתקיים, אם ורק אם תנאי 2 מתקיים):

1. f הפיכה.

2. f חח"ע ועל.

משפט 2.46

תהא $f: A \rightarrow B$ פונקציה.

1. אם הפונקציה f הפיכה, f^{-1} יחידה.

2. הפונקציה ההופכית של f^{-1} היא f . כלומר, $(f^{-1})^{-1} = f$.

2.5 תכונות נוספות של פונקציות

2.5.1 מונוטוניות

הגדרה 2.47 – (פונקציה מונוטונית)

תהינה $A, B \subseteq \mathbb{R}$. תהא $f : A \rightarrow B$ פונקציה. נאמר כי:

1. f מונוטונית עולה, אם לכל $a_1, a_2 \in A$, עבורם מתקיים $a_1 < a_2$, מתקיים $f(a_1) \leq f(a_2)$.
2. f מונוטונית עולה ממש / חזק, אם לכל $a_1, a_2 \in A$, עבורם מתקיים $a_1 < a_2$, מתקיים $f(a_1) < f(a_2)$.
3. f מונוטונית יורדת, אם לכל $a_1, a_2 \in A$, עבורם מתקיים $a_1 < a_2$, מתקיים $f(a_1) \geq f(a_2)$.
4. f מונוטונית יורדת ממש / חזק, אם לכל $a_1, a_2 \in A$, עבורם מתקיים $a_1 < a_2$, מתקיים $f(a_1) > f(a_2)$.

2.48 תרגיל

תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. נביח ש- f מונוטונית עולה חזק (או לחילופין יורדת חזק). אז f חח"ע.

פתרון:

נביח את המקרה בו f עולה. יהיו $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ונביח ש- $a_1 \neq a_2$.
כאשר שני מספרים ממשיים שונים, אז אחד גדול מהשני. מסימטריה, נוכל להניח ש- $a_2 > a_1$.
מכיוון ש- f מונוטונית עולה חזק, מכך נובע ש- $f(a_1) < f(a_2)$. בפרט, $f(a_1) \neq f(a_2)$.
בסה"כ הראנו ש- f חח"ע.

2.5.2 פונקציה זוגית / אי זוגית

הגדרה 2.49 – (פונקציה זוגית / אי זוגית)

תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. נאמר ש- f זוגית אם לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
2. נאמר ש- f אי זוגית אם לכל $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.

2.50 דוגמה

הפונקציות $f(x) = x^2$, $g(x) = 1$ הן זוגיות.
הפונקציות $f(x) = x^3$, $g(x) = x$ הן אי זוגיות.

תרגיל 2.51

1. יהי $n \in \mathbb{N}$ זוגי. הפונקציה x^n היא זוגית.
2. יהי $n \in \mathbb{N}$ אי זוגי. הפונקציה x^n היא אי זוגית.
3. תהא $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ זוגית ואי זוגית, אז $f(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

2.6 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
6*	28.12.18
6	24.5.19
5	20.9.19
1	16.2.21
6	16.2.21
1*	10.9.21
1	19.8.22
5	12.7.24
2	20.9.24
1	17.1.25

3 אי שוויונות

בפרק הקרוב, וכן בחלקים מתוך הפרק הבא, נעסוק באי שוויונות ממשיים. באי שוויונות מסוג זה, יהיה ביטוי התלוי במשתנה, x , ונססה להבין עבור אילו ערכים של x , אי השוויון שמוצג לנו הוא פסוק אמת.

3.1 אי שוויונות ממעלה ראשונה

ראשית נזכר במספר עובדות בסיסיות לגבי אי שוויונות בין מספרים ממשיים.

טענה	
יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. נניח ש- $a < b$.	
1.	$a + c < b + c$
2. אם $c > 0$:	$ac < bc$
3. אם $c < 0$:	$ac > bc$
4. אם $c < d$:	$a + c < b + d$
5. אם $0 \leq a < b$ וגם $0 \leq c < d$:	$ac < bd$

אי שוויון ממעלה ראשונה, הוא אי שוויון מהצורה $ax + b < cx + d$. נרצה להבין עבור אילו ערכים של x מתקיים אי השוויון.

תרגיל 3.1
עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:
$\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} < \frac{x+2}{6}$
פתרון:
ראשית נכפיל את שני האגפים ב-6 כדי לקבל אי שוויון ללא שברים. מכיוון ש- $6 > 0$ אין צורך לשנות את הסימן של אי השוויון:
$3(x+1) - 2(x-1) < x+2$
$3x+3-2x+2 < x+2$
$3x-2x-x < -3-2+2$
$0 < -3$
קיבלנו שלכל $x \in \mathbb{R}$, אי השוויון הזה שקול לפסוק שקר. לכן, לאי השוויון הזה אין כלל פתרונות ממשיים.

3.2 מערכת אי שוויונות

לעיתים, נרצה למצוא מספרים ממשיים שמקיימים מספר אי שוויונות. לכך נקרא מערכת שוויונות. בכדי לפתור מערכת שוויונות, נפתור כל אי שוויון בנפרד, ולאחר מכן נחפש מהם המספרים הממשיים שמקיימים את שני אי השוויונות. כלומר, מהו החיתוך של קבוצות הפתרונות של כל אחד מאי השוויונות.

תרגיל 3.2

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\begin{cases} \text{(I)} & 2x - 6 \geq 0 \\ \text{(II)} & x - 4 < 4 \end{cases}$$

פתרון:

ראשית נפתור את (I). אי השוויון מתקיים כאשר $x \geq 3$. כלומר, קבוצת הפתרונות של אי השוויון הראשון היא $[3, \infty)$.
 בעת נפתור את (II). אי השוויון מתקיים כאשר $x < 8$. כלומר, קבוצת הפתרונות של אי השוויון השני היא $(-\infty, 8)$.



לכן, קבוצת הפתרונות של מערכת אי השוויונות, היא:

$$[3, \infty) \cap (-\infty, 8) = [3, 8)$$

דרך נוספת להציג מערכת של אי שוויונות, היא בצורה הבאה:

תרגיל 3.3

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$7 \leq 2x - 31 < 9$$

פתרון:

נתרגם את אי השוויונות למערכת משוואות:

$$\begin{cases} \text{(I)} & 7 \leq 2x - 31 \\ \text{(II)} & 2x - 31 < 9 \end{cases}$$

ונפתור בצורה דומה לתרגיל הקודם.

3.3 אי שוויונות ממעלה שניה

סוג נוסף ונפוץ של אי שוויונות, הוא אי שוויון של ביטוי פרבולי.

3.3.1 פתרון משוואות פרבוליות

הגדרה 3.4 – (פרבולה)

פרבולה, או פולינום ממעלה שניה, היא פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מהצורה:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

כאשר $a \neq 0$, $b, c \in \mathbb{R}$ כלשהם.

כאשר $a > 0$, הגרף של הפרבולה מחייך. כאשר $a < 0$ הגרף של הפרבולה בוכה.

משוואה ריבועית, היא משוואה מהצורה $f(x) = 0$ כאשר f היא פרבולה. מבחינה גיאומטרית, הפתרונות של משוואה ריבועית, הן נקודות החיתוך של הפרבולה f , עם ציר ה- x . נגדיר את הדסקרימיננטה של המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ להיות $\Delta = b^2 - 4ac$.

משפט 3.5 – (נוסחת השורשים)

תהא $ax^2 + bx + c = 0$ משוואה ריבועית. תהא $\Delta = b^2 - 4ac$ הדסקרימיננטה שלה:

1. אם $\Delta < 0$, למשוואה הריבועים אין פתרון ממשי.

2. אם $\Delta > 0$, למשוואה הריבועית שני פתרונות:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. אם $\Delta = 0$, למשוואה הריבועית פתרון יחיד, $-\frac{b}{2a}$.

הוכחה

נבחין שמתקיים:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 & \iff \cdot 4a \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 & \iff \cdot + \Delta \\ (2ax)^2 + 4abx + b^2 &= \Delta & \stackrel{(*)}{\iff} \\ (2ax + b)^2 &= \Delta \end{aligned}$$

כאשר המעבר $(*)$ הוא נוסחת הכפל המקוצר:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

כעת, אגף שמאל הוא מספר אי שלילי. לכן:

1. אם $\Delta < 0$, נקבל שלכל $x \in \mathbb{R}$, אגף ימין שלילי, ואגף שמאל לא. לכן אין פתרונות ממשיים למשוואה.

2. אם $\Delta > 0$, נוכל לקחת שורש משני האגפים ולקבל את נוסחת השורשים.

3. אם $\Delta = 0$, נוכל שוב לקחת שורש משני האגפים ולקבל את המסקנה.

הערה

1. אם f היא הפרבולה $f(x) = ax^2 + bx + c$, נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x נקבעות על ידי פתרון המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$. יתר על כן, אם $a > 0$, הפרבולה חיובית כל הזמן, למעט בין שני הפתרונות למשוואה (במידה וקיימים). בדומה, אם $a < 0$, הפרבולה שלילית כל הזמן, למעט בין שני הפתרונות למשוואה (במידה וקיימים).
2. בהנתן ביטוי $ax^2 + bx + c$, נוכל להוציא a מהסוגריים ולקבל $a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$. נמצא את פתרונות המשוואה הריבועית:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ונסמנם x_1, x_2 מתקיים:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

עובדה זו מסייעת לנו להציג משוואה פרבולה בצורה מעט שונה, שעלולה להיות שימושית בהמשך.

נעת נוכל להשתמש בהערות האחרונות כדי לפתור אי שוויון ריבועי.

תרגיל 3.6

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

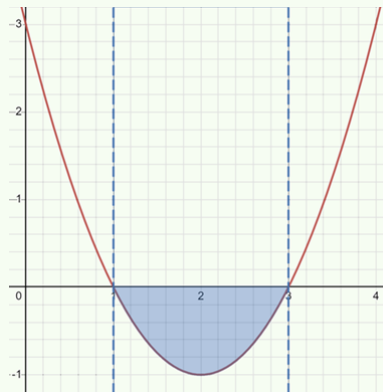
$$2x^2 - 8x < -6$$

פתרון:

ראשית, חלוקה ב-2 לא משנה את אי השוויון. נעשה זאת, ונעביר את כל האיברים לאותו אגף, ונקבל אי שוויון שקול:

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

באמצעות נוסחת השורשים, הפרבולה $f(x) = x^2 - 4x + 3$ חותכת את ציר ה- x בקודות $x_1 = 1, x_2 = 3$. המקדם של x^2 הוא $1 > 0$, כלומר הפרבולה מחייבת, ולכן שלילית בין נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x . כלומר, בתחום $(1, 3)$.



לכן אי השוויון מתקיים לכל x בקטע $(1, 3)$.

3.4 אי שוויון רציונלי

הגדרה 3.7 – (אי שוויון רציונלי)

אי שוויון רציונלי הוא אי שוויון מהצורה $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, כאשר f, g פונקציות ממשיכות. אי השוויון עשוי להיות חלש, או לחילופין בכיוון השני.

אי שוויונות רציונליים ניתן לפתור בשתי דרכים שונות (אם כי בפועל אלו שתי דרכים לתאר את אותה דרך).

3.8 תרגיל

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\frac{x+1}{x-5} \leq 0$$

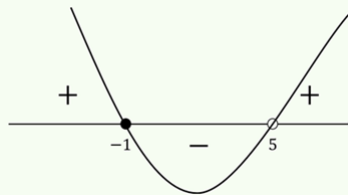
פתרון:

כאשר נפגוש תרגיל בו נדרש לפתור משוואה / אי שוויון, ובביטוי קיים מכנה שתלוי ב- x , ראשית נבדוק מהו תחום ההגדרה של הביטוי. במקרה זה, המכנה יתאפס כאשר $x = 5$. כלומר, $x = 5$ איננו בתחום ההגדרה.

נעת נפתור את התרגיל בשיטת הנחש, או שיטת הטבלה. בשיטה זו, נבחן מתי המונה מתאפס ($x = 1$) ומתי המכנה מתאפס ($x = 5$). נכתוב את הנקודות הללו על ציר המספרים, ונציב ערכים בין הנקודות הללו:

סימן	נקודה	תחום
$\frac{-2+1}{-2-5} = \frac{3}{7} > 0$	$x = -2$	$(-\infty, -1)$
$\frac{0+1}{0-5} = -\frac{1}{5} < 0$	$x = 0$	$(-1, 5)$
$\frac{10+1}{10-5} = \frac{11}{5} > 0$	$x = 10$	$(5, \infty)$

או בשרטוט:



כלומר, הביטוי שלילי בתחום $(-1, 5)$. מכיוון שאי השוויון הוא חלש, נוסיף גם את התחום בו המונה מתאפס, $x = -1$. לכן בסך הכל הפתרון הוא:

$$[-1, 5)$$

כעת נפתור את התרגיל בשיטת חלוקה למקרים. נחלק לתחומים על פי הסימן של המכנה. בתחום $x > 5$, המכנה חיובי. לכן, בתחום זה, הכפלת שני האגפים ב- $x - 5$, לא תחליף את הסימן באי השוויון. כלומר נשאר עם אי השוויון $x + 1 \leq 0$, שהפתרון שלו הוא $x \leq -1$. כלומר, במקרה הראשון, קבוצת הפתרונות היא כל x ממשי שמקיים $x \leq -1$ תחת ההנחה, $x > 5$. כמובן שאין מספרים ממשיים כאלו, ולכן בתחום הזה אין פתרונות. במקרה השני, $x < 5$. תחת ההנחה הזאת, המכנה הוא שלילי, והכפלת שני האגפים ב- $x - 5$ תחליף את סימן אי השוויון. נקבל את אי השוויון $x + 1 \geq 0$, שהפתרון שלו הוא $x \geq -1$. כלומר, במקרה השני קיבלנו שהפתרונות הם כל x ממשי שמקיים $x \geq -1$ תחת ההנחה, $x < 5$. כלומר $x \in [-1, 5)$. גם בשיטה הזו, הגענו כמובן לאותו פתרון.

מדוע התעקשנו למצוא את תחום ההגדרה כבר בתחילת התרגיל? בתרגילים מסויימים, אנחנו נוכל לצמצם ביטויים מהמכנה ומהמונה. בעוד צמצום כזה יסייע לנו ברמה הטכנית, הוא גורם לנו לשכוח את תחום ההגדרה. נתבונן בדוגמה הבאה:

תרגיל 3.9

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} < 0$$

פתרון:

ראשית, נמצא את תחום ההגדרה. המכנה מתאפס כאשר $x = \pm 1$. לכן בתחום ההגדרה נדרוש $x \neq \pm 1$. כעת ננסה לכתוב את המונה בצורה ברורה יותר. מנוסחת השורשים, הפתרונות של המשוואה $x^2 + x - 2 = 0$ הם $x_{1,2} = 1, -2$. לכן:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 1)}$$

מכיוון שכבר ציינו את תחום ההגדרה, הערך $x = 1$ לא מועמד רלוונטי לפתרון אי השוויון. נוכל לצמצם את המונה והמכנה ב- $x - 1$ ולקבל:

$$\frac{x + 2}{x + 1} < 0$$

כעת נפתור את התרגיל בדומה לתרגיל הקודם, ולא נשכח לציין $x \neq 1$ בפתרון.

בתרגילים שנפגוש, ייתכן שהמונה או המכנה בעלי סימן קבוע. נוכל להעזר בעובדה זו כדי לפשט את התרגיל.

תרגיל 3.10

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\frac{x^2 - 10x + 16}{x^2 + 1} < 0$$

פתרון:

ראשית נבחין שהמכנה תמיד חיובי. לכן, הכפלת שני האגפים במספר $x^2 + 1$ לא תשנה את סימן אי השוויון, לכל $x \in \mathbb{R}$. לכן פתרון אי השוויון שקול לפתרון אי השוויון $x^2 - 10x + 16 < 0$. קיבלנו אי שוויון ריבועי שכבר למדנו כיצד לפתור.

הערה

1. לפעמים ייתכן שכל $x \in \mathbb{R}$ יהיה פתרון של אי שוויון $(x^2 + 1 > 0)$, ולעיתים אף פתרון לא יתאים $(x^2 + 1 < 0)$.
כמו כן, לעיתים ייתכן שלא ישוויון יהיה רק פתרון יחיד $(x^2 - 2x + 1 \leq 0)$, ולא תמיד קבוצת הפתרונות תהיה איחוד של קטעים.
2. בדוגמאות שראינו, הביטויים במונה ובמכנה היו לכל היותר ריבועיים. אין שום סיבה להניח שכל אי השוויונות יהיו כאלה. למשל נוכל לראות תרגילים מהצורה:

$$\frac{(x+3)(x^2-x-2)}{x-1} > 0$$

הפתרון שלהם זהה לפתרון שכבר ראינו לאי שוויונות רציונליים, באמצעות שיטת הנחש או חלוקה למקרים.

3.5 אי שוויונות עם ערך מוחלט

בפרק הקודם, הכרנו את פונקציית הערך המוחלט כדוגמה לפונקציה ממשית. הערך המוחלט יופיע באי שוויונות רבים, בעיקר בתחומים כמו חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

ראינו שהערך המוחלט של מספר, מייצג את מרחקו מה-0. בדומה, אם ידוע לנו ש- $|x-2| = 4$, משמעות הדבר היא שהמרחק של x מ-2 הוא 4, ולכן x הוא -2 או 6.
העיקרון לא משתנה מהותית כאשר נעבור לאי שוויונות. קבוצת המספרים הממשיים שמקיימים $|x-3| < 7$ היא קבוצת כל המספרים שמרחקם מ-3 הוא לכל היותר 7. בדוגמה הזאת, ניתן לראות בדומה לשוויון, שהפתרון הוא $(-4, 10)$. אך בדוגמאות מורכבות יותר, הפתרון אינו מידוי.
דרך נוספת לפתור את הדוגמה האחרונה, שתעזור גם בפתרון אי שוויונות מורכבים יותר, היא באמצעות חלוקה למקרים. נזכר שמתקיים:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & x-3 \geq 0 \\ -x+3 & x-3 < 0 \end{cases}$$

נתבונן במקרה בו $x-3 \geq 0$, כלומר $x \geq 3$. תחת המקרה הזה, אי השוויון הנתון לנו הוא:

$$x-3 = |x-3| < 7 \Rightarrow x < 10$$

כלומר במקרה הזה, $3 \leq x < 10$.

במקרה השני, בו $x < 3$ מתקיים:

$$-x+3 = |x-3| < 7 \Rightarrow x > -4$$

כלומר במקרה הזה, $-4 < x < 3$. ולכן צירוף שני המקרים ייתן לנו $-4 < x < 10$.

תרגיל 3.11

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$|x-2| + |x-4| < 30$$

פתרון:

כדי לפתור את אי השוויון בצורה קלה יותר, נרצה להסיר את הערכים המוחלטים. לכן, נחלק למקרים על פי הסימן של

הביטויים שבתוך הערך המוחלט. הנקודות המיוחדות הן 2, 4. אם $x < 2$, מתקיים:

$$(-x + 2) + (-x + 4) = |x - 2| + |x - 4| < 30 \implies -2x + 6 < 30 \implies x > -12$$

כלומר, במקרה הזה קבוצת הפתרונות היא $(-12, 2)$.
אם $2 \leq x < 4$, אז:

$$(x - 2) + (-x + 4) = |x - 2| + |x - 4| < 30 \implies 2 < 30$$

זה כמובן פסוק אמת לכל $x \in \mathbb{R}$. לכן תחת החלוקה למקרים, הפתרונות בתחום זה יהיו $[2, 4)$.
אם $x \geq 4$, מתקיים:

$$(x - 2) + (x - 4) = |x - 2| + |x - 4| < 30 \implies 2x - 6 < 30 \implies x < 18$$

כלומר, במקרה הזה קבוצת הפתרונות היא $[4, 18)$.
לסיכום שלושת המקרים, קבוצת הפתרונות של אי השוויון היא:

$$(-12, 2) \cup [2, 4) \cup [4, 18) = (-12, 18)$$

3.6 אי שוויון המשולש ואי שוויון הממוצעים

נסיים את הפרק עם שני אי שוויונים חשובים.

3.6.1 אי שוויון המשולש

משפט 3.12 – (אי שוויון המשולש)

לכל $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

הוכחה

אם $x, y \geq 0$, אז:

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

אם $x, y < 0$, אז:

$$|x + y| = -x - y = |x| + |y|$$

נניח כעת ש- $y < 0 \leq x$ (המקרה בו $0 \leq x < y$ סימטרי לחלוטין). אז מכך ש- $x < 0$:

$$x + y < y = |y| \leq |y| + |x|$$

ובדומה, מכך ש- $0 \leq -y$:

$$-x - y \leq -x = |x| \leq |x| + |y|$$

כלומר קיבלנו $x + y \leq |x| + |y|$ וכן $-x - y \leq |x| + |y|$. וביחד:

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

כדרוש.

תרגיל 3.13

יהיו $x, y \in \mathbb{R}$. הוכיחו:

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

לאי שוויון זה נקרא אי שוויון המשולש ההפוך.

3.6.2 אי שוויון הממוצעים

משפט 3.14 – (אי שוויון הממוצעים החשבוני-גיאומטרי)

לכל $x, y \geq 0$ מתקיים:

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

הוכחה

שני האגפים הם חיוביים, ולכן העלאה בריבוע לא משנה את הכיוון של אי השוויון. לכן אי השוויון שקול לאי השוויון:

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy \quad \Leftrightarrow \cdot 4$$

$$(x + y)^2 \geq 4xy \quad \Leftrightarrow \cdot -4xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(x - y)^2 \geq 0$$

אי השוויון שקול לפסוק אמת, ולכן מתקיים.

תרגיל 3.15

יהיו $x, y \geq 0$. הוכיחו:

$$\sqrt{xy} \geq \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$$

לאי שוויון זה נקרא אי שוויון הממוצעים הגיאומטרי-הרמוני.

3.7 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
3	מבחן לדוגמה
8	מבחן לדוגמה
7	3.8.17
1	26.9.17
3	25.5.18
3	16.9.18
4	20.9.19
4	10.1.20
1	21.5.20
3	8.4.22
5	1.7.22
2	27.1.23

4 פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות

4.1 הפונקציה המעריכית

4.1.1 הגדרות ותכונות

נקבע $a \in \mathbb{R}$ שמתקיים $0 < a \neq 1$. כבר הכרנו את ההגדרה של a^m עבור $m \in \mathbb{N}$:

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m \text{ פעמים}}$$

נרחיב את ההגדרה עבור $m \in \mathbb{Z}$, על ידי $a^0 = 1$, ולכל $m \in \mathbb{N}$:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

כמו כן, לכל $n \in \mathbb{N}$, קיים מספר $b \in \mathbb{R}$ שמתקיים $0 < b$:

$$b = \sqrt[n]{a}$$

כלומר, $b^n = a$. לכל $q \in \mathbb{Q}$, ניתן לכתוב $q = \frac{m}{n}$ כאשר $m \in \mathbb{Z}$ ו- $n \in \mathbb{N}$. נגדיר:

$$a^q = \sqrt[n]{a^m}$$

טענה

לכל $a, b > 0$ שאינם 1, ולכל $q, p \in \mathbb{Q}$, מתקיימים חוקי החזקות הבאים:

$$1. \quad a^q \cdot a^p = a^{q+p}$$

$$2. \quad \frac{a^q}{a^p} = a^{q-p}$$

$$3. \quad (a \cdot b)^q = a^q \cdot b^q$$

$$4. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}$$

$$5. \quad (a^q)^p = a^{q \cdot p}$$

$$6. \quad a^{-q} = \frac{1}{a^q}$$

$$7. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-q} = \left(\frac{b}{a}\right)^q$$

משפט 4.1

יהי $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$. קיימת פונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת לכל $q \in \mathbb{Q}$:

$$f(q) = a^q$$

שמקיימת:

1. חוקי החזקות מהטענה הקודמת תקפים לכל $p, q \in \mathbb{R}$.

2. תחום ההגדרה של f הוא כל $\mathbb{R}$.

3. $\text{Im}(f) = (0, \infty)$.

4. אם $a > 1$, f פונקציה מונוטונית עולה ממש.

5. אם $0 < a < 1$, f פונקציה מונוטונית יורדת ממש.

6. מסקנה משתי הנקודות האחרונות, f חח"ע.

4.1.2 משוואות מעריכיות

תרגיל 4.2

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$2^{x^2+1} \cdot 4^{2x} = 8 \left(\sqrt[3]{32} \right)^x \cdot 16^x$$

פתרון:

התכונה שתעזור לנו לפתור משוואות מסוג זה, היא חח"ע הפונקציה המעריכית. ראשית נציג את כל הביטויים באמצעות אותו בסיס. במקרה הזה, 2.

$$2^{x^2+1} \cdot 4^{2x} = 8 \left(\sqrt[3]{32} \right)^x \cdot 16^x \quad \Leftrightarrow$$

$$2^{x^2+1} \cdot (2^2)^{2x} = 2^3 \left(\sqrt[3]{2^5} \right)^x \cdot (2^4)^x \quad \Leftrightarrow$$

$$2^{x^2+1} \cdot 2^{4x} = 2^3 \cdot 2^{\frac{5x}{3}} \cdot 2^{4x} \quad \Leftrightarrow$$

$$2^{x^2+1+4x} = 2^{3+\frac{5x}{3}+4x}$$

מכיוון שהפונקציה המעריכית 2^x חח"ע, מכך נובע שהמשוואה שקולה למשוואה:

$$x^2 + 1 + 4x = x + \frac{5x}{3} + 4x \quad \Leftrightarrow$$

$$3x^2 - 5x - 6 = 0$$

מנוסחת השורשים, נובע $x = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{6}$.

תרגיל 4.3

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$27^x - 10 = -9 \cdot 27^{-x}$$

פתרון:

ראשית, נכתוב את אגף ימין בצורה מעט שונה:

$$27^x - 10 = -9 \cdot \frac{1}{27^x}$$

נעת, מכיוון שהביטוי 27^x מופיע בשני האגפים, לנוחות נסמן $t = 27^x$. נזכור ש- $t \neq 0$ ולכן הכפלת שני האגפים בביטוי זה, לא תשנה את המשוואה. נקבל:

$$t^2 - 10t = -9$$

למשוואה הריבועית הזאת שני פתרונות. $t = 1, 9$. נתרגם בחזרה כדי למצוא את ה- x הרלוונטי:

$$27^x = 1 = 27^0 \Rightarrow x = 0$$

$$27^x = 9 = 27^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

4.1.3 אי שוויונות מעריכיים

בכדי לפתור אי שוויונות מעריכיים, נרצה להשתמש במונוטוניות של הפונקציה המעריכית. השאלה היחידה היא איזו מונוטוניות. לעיתים, התשובה לשאלה תהיה תלויה בתחום, ונאלץ לחלק למקרים. נוסף על כך, נזכור שהפונקציה המעריכית מוגדרת רק כאשר הבסיס הוא חיובי, ומתנהגת שונה כאשר הבסיס הוא 1. לכן נתחיל כל תרגיל בכתיבת תחום ההגדרה.

תרגיל 4.4

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$(3x - 2)^{2x+4} > (3x - 2)^{x+7}$$

פתרון:

ראשית, אי השוויון מוגדר כאשר $3x - 2 > 0$, כלומר $x > \frac{2}{3}$. כמו כן, בסיס החזקה יהיה 1, כאשר $3x - 2 = 1$, כלומר $x = 1$. במקרה הזה, הביטוי בשני האגפים יהיה 1. מכיוון שהדרישה בתרגיל היא לאי שוויון חזק, ולא מתקיים $1 > 1$, גם את המקרה הזה נפסול. נעת נרצה להשתמש במונוטוניות של הפונקציה המעריכית. לשם כך, נחלק את התחום לשני חלקים. במקרה הראשון, נניח ש- $3x - 2 > 1$, כלומר $x > 1$. בתחום זה, הבסיס גדול מ-1 ולכן הפונקציה היא מונוטונית עולה. כלומר, אי השוויון שקול תחת ההנחה הזאת לאי השוויון:

$$2x + 4 > x + 7 \Rightarrow x > 3$$

לסיכום המקרה הזה עם ההנחה $x > 1$, קיבלנו שקבוצת הפתרונות היא $x > 3$. במקרה השני, $0 < 3x - 2 < 1$, כלומר $\frac{2}{3} < x < 1$. תחת המקרה הזה, הפונקציה מונוטונית יורדת, ולכן אי השוויון שקול לאי השוויון:

$$2x + 4 < x + 7 \Rightarrow x < 3$$

לסיכום המקרה הזה, הפתרון מתקבל כאשר $\frac{2}{3} < x < 1$.
בסה"כ קבוצת הפתרונות היא:

$$\left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (3, \infty)$$

4.2 הפונקציה הלוגריתמית

4.2.1 הגדרות ותכונות

נתבונן כעת בפונקציה המעריכית, כפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. לאחר צמצום הטווח שלה, מהמשפט האחרון, f פונקציה חח"ע ועל. לכן ממשפט שראינו בפרק על פונקציות, f היא פונקציה הפיכה. לכן קיימת לה פונקציה הופכית.

4.5 – (הפונקציה הלוגריתמית)

יהי $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$. תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ הפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$. נגדיר את הלוגריתם מבסיס a , להיות $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\log_a(x) = f^{-1}(x)$$

משפט 4.6

יהי $a \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1$. מתוקף היותה של הפונקציה הלוגריתמית מבסיס a , הפונקציה ההופכית של הפונקציה המעריכית מבסיס a , היא מקיימת את התכונות הבאות:

1. תחום ההגדרה שלה הוא $(0, \infty)$.

$$\text{Im}(\log_a) = \mathbb{R}$$

3. לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_a(a^x) = x$$

4. לכל $x \in (0, \infty)$:

$$a^{\log_a(x)} = x$$

5. אם $a > 1$, $\log_a$ פונקציה מונוטונית עולה ממש.

6. אם $0 < a < 1$, $\log_a$ פונקציה מונוטונית יורדת ממש.

7. מסקנה משתי הנקודות האחרונות, $\log_a$ חח"ע.

טענה

יהיו $a, b > 0$ המקיימים $a, b \neq 1$, יהיו $x, y > 0$ ויהי $c \in \mathbb{R}$. מתקיימות התכונות הבאות:

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$$

$$\log_a(x) - \log_a(y) = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\log_a(1) = 0 \quad 3.$$

$$\log_a(a) = 1 \quad 4.$$

$$\log_a(x^c) = c \cdot \log_a(x) \quad 5.$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad 6.$$

4.2.2 משוואות לוגריתמיות

4.7 תרגיל

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\log_2(3) + \log_4(2x + 6) = 2$$

פתרון:

ראשית, נמצאת את תחום ההגדרה. הביטוי היחיד שתלוי ב- x הוא $\log_4(2x + 6)$. מכיוון שתחום ההגדרה של $\log_4$ הוא $(0, \infty)$, נדרוש $2x + 6 > 0$, כלומר $x > -3$. כעת, נציג את כל הביטויים כלוגריתם מאותו הבסיס:

$$\log_2(3) + \log_4(2x + 6) = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_2(3) + \frac{\log_2(2x + 6)}{\log_2(4)} = \log_2(4) \quad \Leftrightarrow$$

$$2 \log_2(3) + \log_2(2x + 6) = 2 \log_2(4) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_2(9) + \log_2(2x + 6) = \log_2(16) \quad \Leftrightarrow$$

$$\log_2(9(2x + 6)) = \log_2(16)$$

כעת, הפונקציה $\log_2$ היא חח"ע ולכן המשוואה שקולה למשוואה:

$$9(2x + 6) = 16$$

שפתרונה הוא $x = -\frac{19}{9}$. הפתרון נמצא בתחום ההגדרה.

4.2.3 אי שוויונות לוגריתמים

4.8 תרגיל

עבור אילו ערכים של $x \in \mathbb{R}$, מתקיים:

$$\log_x(4x - 3) > 2$$

פתרון:

ראשית, נשתמש בנוסחת החלפת הבסיס כדי לקבל לוגריתם מבסיס קבוע:

$$\log_x(4x-3) = \frac{\log_2(4x-3)}{\log_2(x)}$$

כעת, מהביטוי, $\log_2(4x-3)$, נובעת הדרישה $x > \frac{3}{4}$ לתחום ההגדרה. מהביטוי $\log_2(x)$ נובעת הדרישה $x > 0$ לתחום ההגדרה, וכמו כן, מכיוון שהביטוי נמצא במכנה, נובעת גם הדרישה $\log_2(x) \neq 0$, כלומר $x \neq 1$. בסה"כ תחום ההגדרה הוא $(\frac{3}{4}, 1) \cup (1, \infty)$. כעת, בתחום $\log_2(x) > 0, (1, \infty)$ ולכן:

$$\frac{\log_2(4x-3)}{\log_2(x)} > 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\log_2(4x-3) > 2 \log_2(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\log_2(4x-3) > \log_2(x^2)$$

הפונקציה $\log_2$ מונוטונית עולה ממש, ולכן אי השוויון שקול לאי השוויון:

$$4x-3 > x^2$$

שהפתרון שלו הוא $1 < x < 3$, ונמצא בתחום ההגדרה. בתחום $\log_2(x) < 0, (\frac{3}{4}, 1)$ ולכן:

$$\frac{\log_2(4x-3)}{\log_2(x)} > 2 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\log_2(4x-3) < 2 \log_2(x) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\log_2(4x-3) < \log_2(x^2)$$

הפונקציה $\log_2$ מונוטונית עולה ממש, ולכן אי השוויון שקול לאי השוויון:

$$4x-3 < x^2$$

שהפתרון שלו הוא $x < 1, 3 < x$. לאחר חיתוך עם ההנחה, נקבל $\frac{3}{4} < x < 1$. בסך הכל הפתרון של אי השוויון הוא $(\frac{3}{4}, 1) \cup (1, 3)$.

4.3 תרגילים ממבחנים

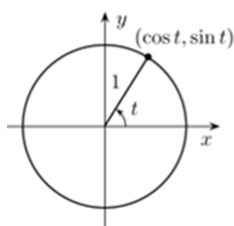
התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

מועד	תרגיל
3.8.17	5
7.9.17	6
26.9.17	3
12.1.18	4
25.5.18	2
2.8.18	4
16.9.18	6
26.10.18	3
28.12.18	2
24.5.19	1
20.9.19	2
10.1.20	2
21.5.20	3
19.6.20	3
16.2.21	5*
7.5.21	3
23.7.21	2
10.9.21	2
31.12.21	2
1.7.22	1
1.7.22	5
19.8.22	4
27.1.23	6
7.7.23	3
8.9.23	2
17.1.25	2

5 פונקציות טריגונומטריות

5.1 הגדרות

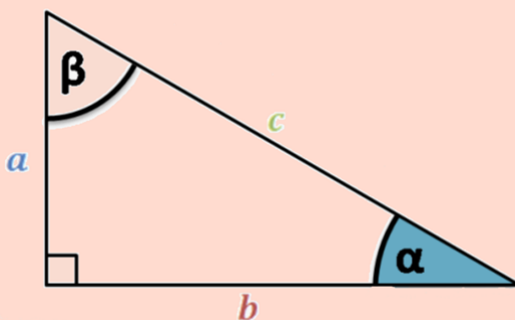
נתבונן במעגל מרדיוס אחד, שמרכזו בראשית הצירים. לכל מספר $0 \leq t < 360$, נתבונן ברדיוס שיוצא מראשית הצירים, ויוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית בת t° . נתבונן בנקודת החיתוך של הרדיוס עם המעגל. נסמן את ערך ה- x של הנקודה ב- $\cos(t)$. כמו כן, נסמן ב- $\sin(t)$ את ערך ה- y של הנקודה.



ההגדרה הזאת מזדהה עם ההגדרה שכבר הכרנו בבית הספר.

הגדרה 5.1 – (סינוס, קוסינוס וטנגנס)

נתבונן במשולש הבא:



$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\end{aligned}$$

ההחלטה לחלק את המעגל ל- 360° , היא החלטה שרירותית, שככל הנראה נבעה מבך ש-360 הוא מספר שמתחלק בהרבה מאוד מספרים, מה שמאפשר לנו לדבר על חצי מעגל, שליש מעגל וכו', מבלי להדרש להשתמש בשברים. אנחנו נשתמש לרוב במושג הרדיון כדי לייצג זווית.

הגדרה 5.2 – (רדיאן)

נתבונן במעגל היחידה, ונתבונן ברדיוס היוצר זווית t עם הכיוון החיובי של ציר ה- x (כמו בתמונה הראשונה בפרק). ערך הזווית t ברדיאנים, הוא אורך הקשת על המעגל בין הנקודות $(0, 1)$ ו- $(\cos(t), \sin(t))$.

המפתח לתרגום זווית בין יחידת המעלות ליחידת הרדיאנים היא:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

באופן כללי, התרגום יתבצע על ידי:

$$t_{\text{rad}} = t_{\text{deg}} \cdot \frac{2\pi}{360}$$

או באופן שקול:

$$t_{\text{deg}} = t_{\text{rad}} \cdot \frac{360}{2\pi}$$

הערה

עכשיו, כשעברנו לדבר בשפה של רדיאנים, נציין שהגדרנו עד כה את הפונקציות הטריגונומטריות בתחום $[0, 2\pi)$. הפונקציה $\tan$ לא מוגדרת בזוויות $\frac{\pi}{2}$ ו- $\frac{3\pi}{2}$ שכן בזוויות אלה, הפונקציה $\cos$ מקבלת את הערך 0.

5.2 הפונקציות הטריגונומטריות הממשיות

כעת, נרצה להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות על כל הישר הממשי. הפונקציות שנגדיר, יהיו פונקציות מחזוריות.

הגדרה 5.3 – (פונקציה מחזורית)

תהא $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה ממשית. נקרא ל- f פונקציה T -מחזורית, אם לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x + T) = f(x)$$

הערה

1. אם f פונקציה ממשית עם תחום הגדרה שאיננו כל $\mathbb{R}$, נוסיף לדרישה בהגדרת פונקציה מחזורית, שלכל $x \in \mathbb{R}$ שייך לתחום ההגדרה של f אם ורק אם $x + T$ שייך לתחום ההגדרה.

2. באינדוקציה (הנושא הבא אותו נלמד), ניתן להוכיח שאם f פונקציה מחזורית, אז לכל $x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{Z}$:

$$f(x + nT) = f(x)$$

5.2.1 סינוס

הגדרה 5.4 – (סינוס)

הפונקציה $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא ההרחבה ה- 2π מחזורית של הפונקציה $\sin: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x - 2\pi n \in [0, 2\pi)$. נגדיר:

$$\sin(x) = \sin(x - 2\pi n)$$

טענה

הפונקציה הממשית $\sin$ מקיימת את התכונות הבאות:

1. תחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{R}$.

2. התמונה שלה היא $[-1, 1]$

3. הפונקציה היא אי זוגית. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

4. $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

5. $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ היא פונקציה חח"ע ועל $[-1, 1]$.

טענה

יהי $a \in \mathbb{R}$. נתבונן במשוואה $\sin(x) = a$.

1. אם $|a| > 1$, כלומר $a > 1$ או $a < -1$, אין למשוואה פתרון.

2. אם $a = 1$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

3. אם $a = -1$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

4. אם $-1 < a < 1$, קיים $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, כך שהפתרונות של המשוואה הם:

$$x = y + 2\pi k, \pi - y + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

5. בפרט, על פי הסעיף הקודם, אם $a = 0$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

5.2.2 קוסינוס

הגדרה 5.5 – (קוסינוס)

הפונקציה $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא ההרחבה ה- 2π מחזורית של הפונקציה $\cos : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x - 2\pi n \in [0, 2\pi)$. נגדיר:

$$\cos(x) = \cos(x - 2\pi n)$$

טענה

הפונקציה הממשית $\cos$ מקיימת את התכונות הבאות:

1. תחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{R}$.

2. התמונה שלה היא $[-1, 1]$.

3. הפונקציה היא זוגית. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

4. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.

5. $\cos|_{[0, \pi]}$ היא פונקציה חח"ע ועל $[-1, 1]$.

טענה

יהי $a \in \mathbb{R}$. נתבונן במשוואה $\cos(x) = a$.

1. אם $|a| > 1$, כלומר $a > 1$ או $a < -1$, אין למשוואה פתרון.

2. אם $a = 1$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

3. אם $a = -1$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \pi + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

4. אם $-1 < a < 1$, קיים $y \in (0, \pi)$ כך שהפתרונות של המשוואה הם:

$$x = y + 2\pi k, -y + 2\pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

5. בפרט, על פי הסעיף הקודם, אם $a = 0$, הפתרונות של המשוואה הם:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

5.2.3 טנגנס

הגדרה 5.6 – (טנגנס)

הפונקציה $\tan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא ההרחבה ה- 2π מחזורית של הפונקציה $\tan : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$, קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $x - 2\pi n \in [0, 2\pi)$. נגדיר:

$$\tan(x) = \tan(x - 2\pi n)$$

טענה

הפונקציה הממשית $\tan$ מקיימת את התכונות הבאות:

1. תחום ההגדרה שלה הוא:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \forall k \in \mathbb{Z}$$

2. התמונה שלה היא $\mathbb{R}$.

3. הפונקציה היא אי זוגית. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(-x) = -\tan(x)$$

4. $\tan$ היא פונקציה חח"ע ועל $\mathbb{R}$.

5. הפונקציה $\tan$ היא למעשה π -מחזורית. כלומר, לכל $x \in \mathbb{R}$:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

אכן:

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{\sin(\pi - (x + \pi))}{-\cos(\pi - (x + \pi))} = \frac{\sin(-x)}{-\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

5.2.4 ערכים חשובים וזהויות טריגונומטריות

ישנם מספר ערכים של הפונקציות הטריגונומטריות, שחשוב שנזכור:

tan	cos	sin	זווית
0	1	0	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
לא מוגדר	0	1	$\frac{\pi}{2}$

כמו כן, חשוב לזכור גם את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

טענה	
לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים:	
1. משפט פיתגורס:	$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2.	$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$
3.	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

5.3 משוואות טריגונומטריות

תרגיל 5.7	
בכל אחד מהסעיפים, מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ המקיימים:	
1.	$\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$
2.	$8 \sin^5(x) - 22 \sin^3(x) + 5 \sin(x) = 0$
פתרון:	
1. ראשית, נבחין שבאשר $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ או $\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. זאת מכיוון שלא קיימת זווית בה גם סינוס וגם קוסינוס מתאפסים. לכן נניח מרגע זה ש- $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$. לכן:	
$\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$	$\Leftrightarrow$
$\sqrt{3} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$	$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	
כעת מהטבלה ומכך ש-tan היא π -מחזורית:	
$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + \pi k$	$\forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$
$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$	$\forall k \in \mathbb{Z}$

2. ראשית, נבחין שבאשר $\sin(x) = 0$, מתקבל שוויון. לכן הפתרון הראשון של המשוואה הוא:

$$x = \pi k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

כעת נניח ש- $\sin(x) \neq 0$ ולכן ניתן לחלק בביטוי. נקבל את המשוואה:

$$8 \sin^4(x) - 22 \sin^2(x) + 5 = 0$$

נסמן $t = \sin^2(x)$ אז:

$$8t^2 - 22t + 5 = 0$$

מנוסחת השורשים נקבל $t = 2.5$ או $t = \frac{1}{4}$. נציב חזרה את x .

$$\sin^2(x) = 2.5 \implies \sin(x) = \pm\sqrt{2.5}$$

מכיוון ש- $\sqrt{2.5} > 1$, אין פתרון במקרה הזה. במקרה השני:

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4} \implies \sin(x) = \pm\frac{1}{2}$$

ולכן:

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

או

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi k = \pm\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2\pi k$$

לכן בסך הכל הפתרונות הם:

$$\begin{aligned} & \{\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ & \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

5.4 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
1*	מבחן לדוגמה
4	מבחן לדוגמה
4	3.8.17
6	3.8.17
3*	7.9.17
7	7.9.17
4	26.9.17
7	26.9.17
1	12.1.18
5*	25.5.18
6	25.5.18
6	2.8.18
4	16.9.18
4	26.10.18
3	28.12.18
1*	6.8.19
5	6.8.19
6*	10.1.20
6	19.6.20
5	30.10.20
4	16.2.21
4	7.5.21
4	23.7.21
3	10.9.21
1	31.12.21
2	1.7.22
3	19.8.22
4	27.1.23
4	7.7.23
6	8.9.23
2	1.3.24
4	12.7.24
3	20.9.24
3	17.1.25

6 אינדוקציה ומספרים שלמים

6.1 הצגת העיקרון ותרגילים

בפרק הקרוב, נכיר את עיקרון האינדוקציה. עיקרון זה יאפשר לנו דרך תבניתית, אך עם זאת "אלגנטית" להוכיח טענות אשר בד"כ יהיו קשורות למספרים טבעיים. נתחיל מהגדרת העיקרות במקרה הבסיסי.

הגדרה 6.1 – (עיקרון האינדוקציה)

נאמר שמתקיים $P(n)$, אם טענה P התלויה בפרמטר $n \in \mathbb{N}$, מתקיימת. נרצה להוכיח את הטענה P לכל $n \in \mathbb{N}$. נעשה זאת בשני שלבים.

1. בסיס האינדוקציה: נוכיח את $P(1)$. כלומר, נוכיח שהטענה P מתקיימת עבור $n = 1$.

2. צעד האינדוקציה: נוכיח שלכל $n \geq 1$, מתקיימת הגרירה:

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

כלומר, נראה שמההנחה שהטענה P מתקיימת עבור n , נובע שהטענה P מתקיימת עבור $n+1$.

מדוע עיקרון האינדוקציה עוזר לנו להוכיח את הטענה לכל $n \in \mathbb{N}$?
על עיקרון האינדוקציה נחשוב כמו על הפלת אבני דומינו. כיצד נבטיח להפיל את כל אבני הדומינו?
נציב את אבני הדומינו במרחק מספיק קרוב אחת לשניה, כך שכאשר האבן ה- n תפול, היא תפיל את האבן ה- $n+1$.
לאחר שהבטחנו שהאבנים מוצבות במיקומים הנכונים, נפיל את האבן הראשונה.

כך גם עובד עיקרון האינדוקציה. אנחנו נוכיח את הטענה עבור $n = 1$.
כעת, מכיוון שאנחנו הראנו שנכונות הטענה עבור 1, גוררת את נכונות הטענה עבור 2, ומכיוון שהוכחנו את הטענה עבור 1, הטענה נכונה גם עבור 2.
כך נמשיך, להסיק את נכונות הטענה עבור 3. מדוע? אנחנו ראינו שהטענה נכונה עבור 2, ואנחנו הוכחנו שנכונות הטענה עבור 2, גוררת את נכונות הטענה עבור 3.
נמשיך כך ונגיע לכל $n \in \mathbb{N}$.

נפנים את הרעיון בצורה יותר עמוקה באמצעות מספר תרגילים. לשם כך נכיר את ההגדרה הבאה:

הגדרה 6.2 – $(\sum_{i=1}^n a_i)$

בהנתן סדרה של איברים $a_1, a_2, \dots, a_n$, נגדיר את:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

זהו סימון שנועד לסייע לנו לכתוב סכומים של n איברים בצורה נוחה לקריאה. כיצד נקרא אותו?
ה- i מצוין את אינדקס הספירה, ה-1 את הערך ההתחלתי וה- n את הערך הסופי.

תרגיל 6.3

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n = k$. כלומר:

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2}$$

נוכיח שמכך נובעת הטענה עבור $n = k + 1$. אכן:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח.

תרגיל 6.4

יהי $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n a^i = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

פתרון:

נוכיח באינדוקציה.

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^n a^i = a = \frac{a(a - 1)}{a - 1} = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת עבור $n = k$. כלומר:

$$\sum_{i=1}^k a^i = \frac{a(a^k - 1)}{a - 1}$$

נוכיח שמכך נובעת הטענה עבור $n = k + 1$. אכן:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} a^i &= \sum_{i=1}^k a^i + a^{k+1} = \\ &= \frac{a(a^k - 1)}{a - 1} + a^{k+1} = \\ &= \frac{a(a^k - 1) + a^{k+1}(a - 1)}{a - 1} = \\ &= \frac{a^{k+1} - a + a^{k+2} - a^{k+1}}{a - 1} = \\ &= \frac{-a + a^{k+2}}{a - 1} = \frac{a(a^{k+1} - 1)}{a - 1} \end{aligned}$$

כפי שרצינו להוכיח.

הערה

לעיקרון האינדוקציה קיימת הכללה שעובדת בצורה דומה לגרסה שכבר הכרנו. ראשית, לפעמים בסיס האינדוקציה יהיה עבור $n = 0$. כמו כן, לעיתים לא נרצה להוכיח טענה לכל $n \in \mathbb{N}$, אלא תהיה $A \subseteq \mathbb{N}$ ונרצה להוכיח את הטענה לכל $n \in A$. גם בגרסה הזאת נוכיח את הטענה ראשית עבור האיבר המינימלי בקבוצה ה- A . לאחר מכן נוכיח שלכל איבר $a \in A$, אם הטענה נכונה עבורו, נובע שהטענה נכונה גם עבור האיבר $b \in A$ הקטן ביותר שמקיים $b > a$.

6.2 חלוקת מספרים שלמים

בנושא זה נלמד על מושג החלוקה ונראה יישום של ההערה האחרונה.

הגדרה 6.5 – (חלוקה)

יהי $a \in \mathbb{Z}$. נאמר ש- a מתחלק במספר $n \in \mathbb{N}$, אם קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = m \cdot n$.

6.6 תרגיל

אם a, b מתחלקים ב- n , כך גם $-a$ וכמו כן $a + b$.

6.7 תרגיל

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ אי זוגי, $4^n + 7^n$ מתחלק ב-11.

פתרון:

נוכיח באינדוקציה. נבחין שלא התבקשנו להוכיח טענה לכל $n \in \mathbb{N}$ אלא לכל מספר טבעי אי זוגי. בסיס האינדוקציה: ראשית נוכיח את הטענה עבור המספר הטבעי האי זוגי הקטן ביותר, $n = 1$. אכן:

$$4^1 + 7^1 = 4 + 7 = 11$$

ו-11 בהחלט מתחלק ב-11.

צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$. נוכיח שמכך נובעת הטענה עבור המספר הטבעי האי זוגי, הקטן ביותר שגדול מ- k , $k+2$. מכך שהטענה מתקיימת עבור k , נובע ש- $4^k + 7^k$ מתחלק ב-11. כלומר, קיים $m \in \mathbb{Z}$ עבורו:

$$4^k + 7^k = 11 \cdot m$$

לכן:

$$\begin{aligned} 4^{k+2} + 7^{k+2} &= 4^2 \cdot 4^k + 7^2 \cdot 7^k = 16 \cdot 4^k + 49 \cdot 7^k = \\ &= 16 \cdot 4^k + 16 \cdot 7^k + 33 \cdot 7^k = \\ &= 16 \cdot (4^k + 7^k) + 11 \cdot (3 \cdot 7^k) = \\ &= 11 \cdot 16m + 11 \cdot (3 \cdot 7^k) = 11 \cdot (16m + 3 \cdot 7^k) \end{aligned}$$

המספר $\ell = 16m + 3 \cdot 7^k$ הוא מספר שלם וקיבלנו $4^{k+2} + 7^{k+2} = 11\ell$. כלומר, 11 מחלק את $4^{k+2} + 7^{k+2}$. בסה"כ הוכחנו את טענת האינדוקציה.

6.8 תרגיל

1. הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים מספר $m \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$10^n = 11 \cdot m + (-1)^n$$

2. יהי $a \in \mathbb{N}$ הוכיחו ש- a מתחלק ב-11 אם ורק אם סכום הספרות שלו בסימנים מתחלפים, מתחלק ב-11.

פתרון:

1. נוכיח באינדוקציה. בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$:

$$10^1 = 10 = 11 - 1 = 11 + (-1)^1$$

צעד האינדוקציה: נניח שהוכחנו את הטענה עבור $n = k$. כלומר, קיים מספר $m \in \mathbb{N}$ עבורו:

$$10^k = 11m + (-1)^k$$

רא:

$$\begin{aligned} 10^{k+1} &= 10 \cdot 10^k = 10 \left(11m + (-1)^k \right) = \\ &= 11 \cdot 10m + \underbrace{10}_{=11-1} \cdot (-1)^k = \\ &= 11 \cdot 10m + 11 \cdot (-1)^k - (-1)^k = \\ &= 11 \cdot \left(10m + (-1)^k \right) + (-1)^{k+1} \end{aligned}$$

כלומר, עבור $\ell = 10m + (-1)^k \in \mathbb{N}$, מתקיים $10^{k+1} = 11\ell + (-1)^{k+1}$.
בסה"כ הוכחנו את טענת האינדוקציה.

2. ראשית נתחיל בלהבין למה הכוונה בשאלה. נתבונן במספר 9273, שמתחלק ב-11 (ודאו זאת). סכום הספרות שלו בסימנים מתחלפים, הוא:

$$9 - 2 + 7 - 3 = 11$$

כעת, כיצד נגש לפתרון התרגיל? מכיוון שמדובר בסעיף ב' של שאלה, סביר לחשוד שיהיה שימוש בסעיף א'. בפרט, נצטרך לקשר את הפתרון שלנו למה שאנחנו הוכחנו לגבי המספר 10^n . כל מספר בכתיב עשרוני, ניתן לכתיבה כסכום של חזקות של 10, כפול הספרה הרלוונטית. לדוגמה:

$$9273 = 9 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 3 \cdot 1 = 9 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

כעת, יהי $a \in \mathbb{N}$. נכתוב את a כסכום חזקות של עשר. נניח ש- a מספר בן $n+1$ ספרות. נסמן ב- a_0 את ספרת האחדות שלו, ב- a_1 את ספרת העשרות וכן הלאה. אז:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$$

מסעיף א', נובע:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n = \\ &= a_0 + a_1 \cdot \left(11m_1 + (-1)^1 \right) + a_2 \cdot \left(11m_2 + (-1)^2 \right) + \dots + a_n \cdot \left(11m_n + (-1)^n \right) = \\ &= 11 \cdot (a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2 + \dots + a_n \cdot m_n) + a_0 + a_1 \cdot (-1)^1 + \dots + a_n \cdot m_n \end{aligned}$$

נסמן $k = a_1 \cdot m_1 + a_2 \cdot m_2 + \dots + a_n \cdot m_n$. קיבלנו:

$$a = 11k + a_0 + a_1 \cdot (-1)^1 + \dots + a_n \cdot (-1)^n$$

כלומר, a הוא סכום של מספר שמתחלק ב-11, וסכום הספרות שלו בסימנים מתחלפים. כעת נוכל לפתור את התרגיל. מכיוון שזו טענת אם ורק אם, יש שני כיוונים שיש להוכיח. נניח שסכום הספרות בסימנים מתחלפים של a מתחלק ב-11. והמשוואה אליה הגענו, נובע ש- a סכום של שני מספרים שמתחלקים ב-11, ולכן מתחלק ב-11. את הכיוון השני ניתן להוכיח בצורה זוהה, לאחר העברת $11k$ אגף. בסה"כ פתרנו את התרגיל.

הגדרה 6.9 – (שארית חלוקה)

יהי $a \in \mathbb{Z}$, ויהי $n \in \mathbb{N}$. נאמר ששארית החלוקה של a ב- n היא $r \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, אם קיים $m \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = m \cdot n + r$.

הערה

יהיו $a \in \mathbb{Z}$ ו- $n \in \mathbb{N}$.

1. שארית החלוקה של a ב- n קיימת ויחידה.

2. a מתחלק ב- n אם ורק אם שארית החלוקה של a ב- n היא 0.

דוגמה 6.10

1. שארית החלוקה של 7 ב-2 היא 1, מכיון ש- $7 = 3 \cdot 2 + 1$.

2. שארית החלוקה של 37 ב-8 היא 5, מכיון ש- $37 = 4 \cdot 8 + 5$.

3. שארית החלוקה של 2024 ב-19 היא 10, מכיון ש- $2024 = 106 \cdot 19 + 10$.

תרגיל 6.11

הוכיחו כי שארית החלוקה ב-3 של ריבוע של מספר טבעי שייכת לקבוצה $\{0, 1\}$.

פתרון:

ראשית נכתוב במפורש את כוונת השאלה. יש להוכיח שלכל $a \in \mathbb{N}$, שארית החלוקה של a^2 ב-3 היא 0 או 1. כלומר, לא יכולה להיות 2.

נחלק למקרים לפי שארית החלוקה של a ב-3.

אם שארית החלוקה היא 0, אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = k \cdot 3 + 0 = k \cdot 3$. לכן:

$$a^2 = (k \cdot 3)^2 = 9k^2 = (3k^2) \cdot 3 = (3k^2) \cdot 3 + 0$$

אם שארית החלוקה היא 1, אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = k \cdot 3 + 1$. לכן:

$$a^2 = (k \cdot 3 + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = (3k^2 + 2k) \cdot 3 + 1$$

אם שארית החלוקה היא 2, אז קיים $k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $a = k \cdot 3 + 2$. לכן:

$$a^2 = (k \cdot 3 + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = (3k^2 + 4k + 1) \cdot 3 + 1$$

במקרה הראשון, שארית החלוקה של a^2 ב-3 הייתה 0, ובכל מקרה אחר שארית החלוקה היא 1.

6.3 סכנות האינדוקציה

ראינו שאינדוקציה היא כלי מאוד שימושי להוכחת טענות, אך אם נעבוד איתה בצורה לא זהירה, ייתכן שנוכיח שטויות מוחלטות.

דוגמה 6.12

נוכיח באינדוקציה שכל מספר טבעי הוא פצפון לעומת מיליון.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, אין שאלה בכלל, 1 הוא פצפון לעומת מיליון.
צעד האינדוקציה: נניח ש- $n = k$ הוא פצפון לעומת מיליון. כבר דיברנו על זה ש-1 פצפון לעומת מיליון, אז כמה כבר $k + 1$ גדול יותר מ- k ? לא הרבה. אז גם $k + 1$ פצפון לעומת מיליון.
טענה זו היא כמובן שגויה מהיסוד. ונובעת מכך שהמושג "פצפון לעומת מיליון" הוא לא מושג מתמטי מוגדר היטב.

הדוגמה הבאה היא מעט יותר עדינה.

דוגמה 6.13

נוכיח באינדוקציה שלכל $n \in \mathbb{N}$, ובכל קבוצה של n סוסים, כל הסוסים יהיו באותו הצבע.
בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$, בכל קבוצה של סוס אחד, כל הסוסים באותו הצבע.
צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור $n = k$. כלומר, שבכל קבוצה של k סוסים, כל הסוסים באותו הצבע. נסיק את הטענה עבור $n + 1$.
תהא $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ קבוצה של $k + 1$ סוסים. נוציא מהקבוצה את הסוס a_{k+1} . בקבוצה $\{a_1, \dots, a_k\}$ יש k סוסים, ולכן כולם באותו הצבע.
נוציא כעת מ- A את a_1 . בקבוצה $\{a_2, a_3, \dots, a_{k+1}\}$ יש k סוסים ולכן כולם באותו הצבע.
הסוס a_2 היה בכל אחת משתי תתי הקבוצות. לכן הוא בצבע של כל הסוסים האחרים, כלומר כל הסוסים באותו הצבע.
לכולנו ברור שמשהו לא נעשה כשורה. אך היכן הבעיה?
התשובה היא צעד האינדוקציה. למעשה הבעיה היא שהנחנו ש- a_2 ו- a_{k+1} הם שני סוסים נפרדים. זאת מכיוון שאם $k = 1$, בקבוצת $k + 1$ הסוסים, יש רק שני סוסים, ואין סוס שיהיה שייך לשתי תתי הקבוצות.

ניתן להגיע לסתירות מוזרות נוספות אם לא נזהר בהוכחה באינדוקציה. לכן חשוב מאוד לפעול בזהירות.

6.4 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
2	מבחן לדוגמה
6	מבחן לדוגמה
1	3.8.17
1	7.9.17
5	26.9.17
6	12.1.18
1	25.5.18
2	2.8.18
3	2.8.18
1	16.9.18
1	28.12.18
2	24.5.19
3	24.5.19
3	6.8.19
1	20.9.19
3	10.1.20
5*	10.1.20
2	21.5.20
1	19.6.20
2	19.6.20
2	30.10.20
3	30.10.20
2	7.5.21
5	23.7.21
6	10.9.21
3	31.12.21
4	31.12.21
6	31.12.21
1	8.4.22
4	8.4.22
4	1.7.22
6	19.8.22
1	27.1.23
1	7.7.23
5	7.7.23
1	8.9.23
3	8.9.23
1	1.3.24
6	1.3.24
3	12.7.24
4	20.9.24
4	17.1.25

7 מספרים מרוכבים

7.1 מוטיבציה

הגדרה 7.1 – (פולינום ממשי)

פולינום ממשי ממעלה n , הוא פונקציה מהצורה:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

כאשר $a_0, \dots, a_n$ מספרים ממשיים קבועים.

דוגמה 7.2

1.

$$p(x) = x^2 = x^2 + 0x + 0$$

2.

$$q(x) = 7x^8 - 16x^4 + 31x - 1$$

3. הפונקציה:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

איננה פולינום.

הגדרה 7.3 – (שורש של פולינום)

יהי p פולינום. נאמר ש- c הוא שורש של p , אם $p(c) = 0$.

דוגמה 7.4

1. לפולינום $p(x) = x^2 - 6x + 8$ יש שני שורשים. $p(2) = p(4) = 0$.

2. לפולינום $p(x) = x^2 + 1$ אין שורש ממשי. זאת מכיוון ש- $x^2 \geq 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$, ו- $0 < 1$. אז בסה"כ $x^2 + 1 > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

בתחומים רבים במתמטיקה, יש שימוש נרחב בפולינומים, ולשורשי הפולינומים יש חשיבות גדולה. שדה המספרים המרוכבים נועד לפתור את הבעיה של פולינומים ללא שורש.

הגדרה 7.5 – ($\mathbb{C}$ - i)

נגדיר את $i = \sqrt{-1}$. כלומר, i הוא סימון למספר חדש שהוספנו, שמקיים $i^2 = -1$. נגדיר את המספרים המרוכבים להיות:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

הקבוצה הזאת ביחד עם הגדרות החיבור והכפל שנגדיר בקרוב, בונה לנו אובייקט מתמטי שנקרא שדה. המספר $0 + 1 \cdot i$ הוא שורש לפולינום $p(x) = x^2 + 1$. אך עובדה מפתיעה, שנקראת גם המשפט היסודי של האלגברה,

היא שלכל פולינום מרוכב, יש שורש. כלומר, לכל $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, קיים $c \in \mathbb{C}$ כך שעבור $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

מתקיים $p(c) = 0$.

7.2 הגדרות ופעולות בסיסיות

7.2.1 הצגה קרטזית

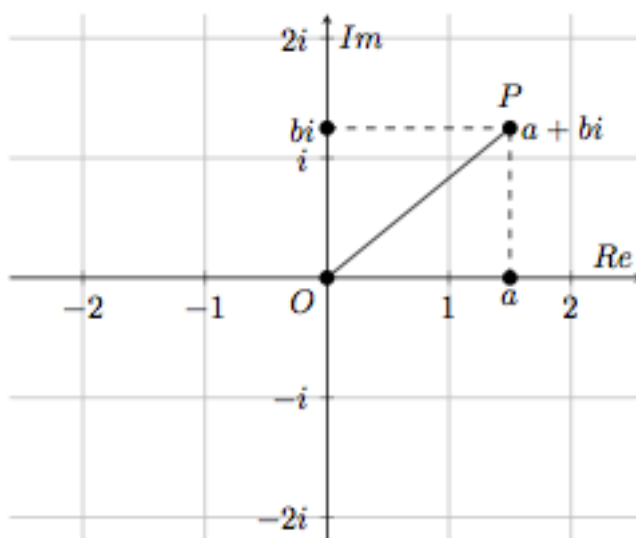
7.6 – (הצגה קרטזית של מספר מרוכב)

יהי $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

1. למספר a נקרא החלק הממשי של z , ונסמנו ב- $\operatorname{Re}(a + bi)$.

2. למספר b נקרא החלק המדומה של z , ונסמנו ב- $\operatorname{Im}(a + bi)$.

למספרים המרוכבים, יש אינטואיציה גיאומטרית, שחשוב שתהיה בראשנו כאשר ננסה לפתור תרגילים בנושא. נצייר מישור, ונתייחס לציר ה- x בציר הממשי, ולציר ה- y בציר המדומה. למספר $P = a + bi$ נתייחס כנקודה במישור:



7.2.2 שוויון, חיבור, חיסור וכפל של מספרים מרוכבים

יהיו $z = x + yi$, $w = a + bi$ מספרים מרוכבים. נאמר ש- $z = w$ אם $x = a$ ו- $y = b$. נגדיר את החיבור ביניהם להיות:

$$z + w = x + yi + a + bi = (x + a) + (y + b)i$$

נגדיר את החיסור ביניהם להיות:

$$z - w = x + yi - (a + bi) = (x - a) + (y - b)i$$

נגדיר את הכפל ביניהם להיות:

$$x \cdot w = (x + yi) \cdot (a + bi) = xa + xbi + yai + yb \underbrace{i^2}_{=-1} = (xa - yb) + (xb + ya)i$$

7.2.3 צמוד מרוכב, ערך מוחלט וחילוק של מספרים מרוכבים

הגדרה 7.7 – (צמוד מרוכב)

יהי $z = x + yi$ מספר מרוכב. נגדיר את הצמוד המרוכב שלו:

$$\bar{z} = x - yi$$

נזכר באינטואיציה הגיאומטרית של ההצגה הקרטזית. הפעולה הגאומטרית של הצמדה מרוכבת, היא שיקוף סביב ציר ה- x . כלומר, אם נדמיין שעל ציר ה- x הייתה מוצבת מראה, הצמוד המרוכב של z הוא ההשתקפות של z .

דוגמה 7.8

$$\bar{z} = 4 + 3i, z = 4 - 3i \text{ אם}$$

הערה

אם $x \in \mathbb{R}$, ניתן לחשוב עליו כמספר המרוכב $z = x + 0i$. הצמוד המרוכב שלו יהיה $\bar{z} = \overline{x + 0i} = x - 0i = z$. כלומר, הצמדה מרוכבת לא משפיעה על מספרים ממשיים.

טענה

יהיו $z = x + yi, w = a + bi$ מספרים מרוכבים. אז:

1.

$$\overline{\bar{z}} = z$$

2.

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

3.

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

4. בקרוב נגדיר חילוק של מספרים מרוכבים. החילוק מקיים:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

כאשר בסעיף זה הנחנו ש- $w \neq 0$.

5. המספר $\bar{z} \cdot z$ הוא מספר ממשי אי שלילי, ושווה ל-0 אם ורק אם $z = 0$.

הוכחה

1.

$$\overline{\overline{z}} = \overline{x + yi} = \overline{x - yi} = x + yi = z$$

2.

$$\overline{z + w} = \overline{(x + a) + (y + b)i} = (x + a) - (y + b)i = x - yi + a - bi = \overline{z} + \overline{w}$$

3.

$$\overline{z \cdot w} = \overline{(xa - yb) + (xb + ya)i} = (xa - yb) - (xb + ya)i$$

כמו כן:

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{x + yi} \cdot \overline{a + bi} = (x - yi)(a - bi) = (xa - yb) - (xb + ya)i$$

4. ישאר כתרגיל.

5.

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

המספרים x, y הם מספרים ממשיים, ולכן x^2, y^2 ממשיים ואי שליליים, וכך גם סכומם.

$$z = 0 \iff x = y = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff z \cdot \overline{z} = 0$$

הגדרה 7.9 – (ערך מוחלט של מספר מרוכב)

יהי $z = x + yi$ מספר מרוכב. נגדיר את הערך המוחלט של z :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

מהטענה האחרונה, אנחנו ראינו ש-

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

כאשר דיברנו על ערך מוחלט ממשי, דיברנו על זה שהערך המוחלט של מספר, מייצג את המספר שלו מ-0. גם במספרים מרוכבים, הערך המוחלט של מספר, מייצג את המרחק שלו מראשית הצירים. זאת ניתן להראות באמצעות משפט פיתגורס. כאשר $z \in \mathbb{R}$, כלומר $z = x + 0i$, ההגדרה של הערך המוחלט המרוכב של z , מזדהה עם ההגדרה של הערך המוחלט הממשי שלו.

טענה

הערך המוחלט המרוכב מקיים את התכונות הבאות:

$$1. |z| \geq 0 \text{ ו-} |z| = 0 \iff z = 0.$$

$$2. |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

3. אי שוויון המשולש:

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

4. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha z| = |\alpha| \cdot |z|$$

הוכחת תכונות אלו יושארו כתרגיל.

באמצעות הערך המוחלט, נוכל להגדיר לכל $z \in \mathbb{C}$ מספר הופכי כפלי, וכך להגדיר את פעולת החילוק. אנחנו ראינו שמתקיים:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

השוויון הזה הוא שוויון של מספרים ממשיים. לכן, אם $z \neq 0$ נוכל לחלק את שני האגפים ב- $|z|^2$, ולקבל:

$$\frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1$$

כלומר, אם נכפיל את z במספר $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$, נקבל 1. זה מוביל באופן טבעי להגדרה הבאה:

הגדרה 7.10 – (הופכי כפלי של מספר מרוכב)

יהי $z \in \mathbb{C}$ נגדיר את ההפכי הכפלי שלו:

$$\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

הגדרה 7.11 – (חילוק מספרים מרוכבים)

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$ ונניח ש- $w \neq 0$. נגדיר את החילוק שלהם:

$$\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}$$

תרגיל 7.12

יהיו $z = 1 - i, w = 3 + 4i$. חשבו את $|z|$ ואת $\frac{w}{z}$.

פתרון:
ראשית:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

כעת:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \bar{z}}{|z|^2} = \frac{(3 + 4i)(1 + i)}{2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

7.2.4 שורשים של פולינומים

המוטיבציה הראשונית של הגדרת המספרים המרוכבים, ובפרט הגדרת המספר המרוכב i , הייתה מציאת שורשים לפולינומים. הטענה הבאה אותה נוכיח, תראה שבהנתן שורשים של פולינומים מסויימים, נוכל למצוא שורשים נוספים.

טענה

יהיו $n \in \mathbb{N}$, ויהיו $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

$$1. \overline{z_1 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \dots + \overline{z_n}$$

$$2. \overline{z_1 \cdot \dots \cdot z_n} = \overline{z_1} \cdot \dots \cdot \overline{z_n}$$

הוכחה

נוכיח את טענה (1) באינדוקציה. ההוכחה של טענה 2 זהה. בבסיס, עבור $n = 1$, הטענה מתקיימת בבירור. צעד: נניח נכונות עבור n מספרים, ונסיק נכונות עבור $n + 1$ מספרים.

$$\overline{z_1 + \dots + z_n + z_{n+1}} = \overline{(z_1 + \dots + z_n) + z_{n+1}} \stackrel{(*)}{=} \overline{(z_1 + \dots + z_n)} + \overline{z_{n+1}} \stackrel{(**)}{=} \overline{z_1} + \dots + \overline{z_n} + \overline{z_{n+1}}$$

כאשר מעבר $(*)$ נכון בשל נכונות הטענה עבור שני מספרים (כפי שכבר הוכחנו), ומעבר $(**)$ מתקיים מהנחת האינדוקציה. בסך הכל, השלמנו את הוכחת האינדוקציה.

טענה

$$\overline{z^n} = (\overline{z})^n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$$

הוכחה

טענה זו נובעת מסעיף (2) בטענה הקודמת, על ידי בחירת $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$.

משפט 7.13

יהיו $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. נתבונן בפולינום:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

אם $z_0 \in \mathbb{C}$ שורש של הפולינום, כלומר אז גם $\overline{z_0}$ שורש של הפולינום.

יש להראות ש- $p(\overline{z_0}) = 0$, אכן, מהטענות הקודמות מתקיים:

$$\begin{aligned} p(\overline{z_0}) &= a_n (\overline{z_0})^n + a_{n-1} (\overline{z_0})^{n-1} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\ &= a_n \overline{z_0^n} + a_{n-1} \overline{z_0^{n-1}} + \dots + a_1 \overline{z_0} + a_0 \\ &= \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_1 z_0} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &= \overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_1 z_0 + a_0} \\ &\stackrel{(*)}{=} \overline{p(z_0)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

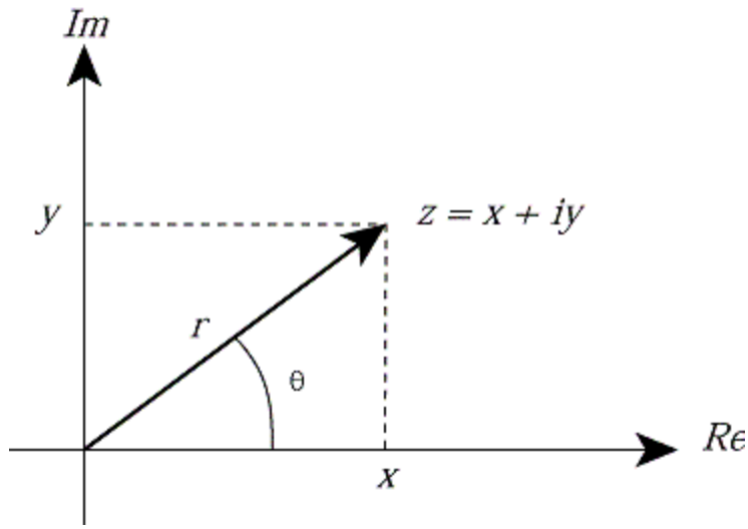
כאשר המעבר $(*)$ מתקיים מכיוון ש- z_0 הוא שורש של p .
בסך הכל הראנו ש- $\overline{z_0}$ שורש של הפולינום, כפי שרצינו.

7.3 הצגה פולארית ונוסחת דה מואבר

כפי שניתן לראות מהדוגמאות שראינו, בעוד חיבור מספרים מרוכבים מתבצע בצורה טבעית ופשוטה, הכפל הוא פעולה קצת פחות טבעית. כפועל יוצא, העלאה בחזקה ולקיחת שורש, הן פעולות הרבה יותר קשות. כדי להתמודד עם הבעיה הזאת, נציג הצגה נוספת למספר מרוכב.

7.3.1 הצגה פולארית

כבר ראינו שכל מספר מרוכב, $z = x + yi$, ניתן להציג כנקודה במישור המרוכב. כעת נשים לב שאת הנקודה הזאת, ניתן להציג בצורה אחרת מקואורדינטות x, y .
לכל נקודה במישור, יש מרחק כלשהו מהראשית, הערך המוחלט שלה. נסמנו ב- r . כעת, נתבונן במעגל סביב ראשית הצירים, ברדיוס r . הנקודה שלנו נמצאת עליו, שכן מרחקה מהראשית הוא r .
כעת, כפי שראינו בפרק של טריגונומטריה, קיימת זווית, θ , שהיא הזווית שנוצרת בין הכיוון החיובי של ציר ה- x לבין הישר שמחבר את הנקודה לראשית הצירים.
את ההסבר המבלבל הזה, מסכם התרשים הבא:



נגדיר כעת את ההצגה הפולארית באופן פורמלי.

הגדרה 7.14 – (הצגה פולארית של מספר מרוכב)

יהי $z = x + yi \in \mathbb{C}$. ההצגה הפולארית של z תסומן על ידי $r \operatorname{cis}(\theta)$ או לחילופין $re^{i\theta}$, כאשר:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ו- $\theta \in [0, 2\pi)$ היא פתרון של המשוואה:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

כאשר הזווית θ נקבעת על פי הסימנים של x, y :

θ	רביע	הסימן של x	הסימן של y
$(0, \frac{\pi}{2})$	I	+	+
$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	II	-	+
$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	III	-	-
$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	IV	+	-

הערה

הסימון $\operatorname{cis}(\theta)$, הוא סימון מקובל לכתוב:

$$\operatorname{cis}(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

סימון זה גם מבהיר לנו כיצד מתבצע התרגום של מספר מרוכב מהצגה פולארית להצגה קרטזית. נניח ש- $z = r \operatorname{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$. ניתן לכתוב $z = x + yi$ כאשר:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

תרגיל 7.15

1. כתבו את המספר $z = 4 + 4i$ בצורה פולארית.

2. כתבו את המספר $w = 3 \operatorname{cis}(\frac{\pi}{2})$ בצורה קרטזית.

פתרון:

1. ראשית נחשב את הערך המוחלט של z :

$$|z| = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

כעת, נחשב את הזווית. כלומר, נמצא את הפתרון המתאים למשוואה:

$$\tan(\theta) = \frac{4}{4}$$

מכיוון שהחלק הממשי והמדומה חיוביים:

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ לכן}$$

2. מתקיים:

$$x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot 1 = 3$$

$$w = 3i \text{ כלומר}$$

טענה

יהי $z \in \mathbb{C}$. נסמן $z = r \operatorname{cis}(\theta)$.

$$1. \bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$$

$$2. \text{ אם } z \neq 0, z^{-1} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$$

הוכחה

1. נכתוב $\bar{z} = \rho \operatorname{cis}(\varphi)$. נרצה לחשב את ρ ואת φ .
אם $z = x + yi$, אז $\bar{z} = x - yi$ ולכן:

$$\rho = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

כמו כן,

$$\tan(\varphi) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan(\theta) = \tan(-\theta)$$

ההצמדה המרוכבת מעבירה מספרים בין הרביע הראשון והרביעי ובין השני והשלישי, לכן $\varphi = -\theta = 2\pi - \theta$.
בסך הכל $\bar{z} = r \operatorname{cis}(\theta)$.

2. אכן,

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{r \operatorname{cis}(-\theta)}{r^2} = \frac{1}{r} \operatorname{cis}(-\theta)$$

7.3.2 משפט דה מואבר

אחרי שלמדנו להמיר מספרים מרוכבים לצורה הפולארית שלהם, נראה כעת מה היתרון בצורה זו.
ראשית, נלמד כיצד להכפיל שני מספרים בצורה הפולארית שלהם. לשם כך נעזר בנוסחה הטריגונומטרית הבאה:

משפט 7.16

לכל $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\cos(\theta) \cos(\varphi) - \sin(\theta) \sin(\varphi) &= \cos(\theta + \varphi) \\ \cos(\theta) \sin(\varphi) + \sin(\theta) \cos(\varphi) &= \sin(\theta + \varphi)\end{aligned}$$

מכך נובע:

משפט 7.17

יהיו $z = r \operatorname{cis}(\theta)$, $w = \rho \operatorname{cis}(\varphi)$ מתקיים:

$$z \cdot w = r \rho \operatorname{cis}(\theta + \varphi)$$

הוכחה

אכן:

$$\begin{aligned}z \cdot w &= r(\cos(\theta) + \sin(\theta)i) \rho(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)i) = \\ &= r\rho(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi)i) = \\ &= r\rho(\cos(\theta + \varphi) + \sin(\theta + \varphi)i) = \\ &= r\rho \operatorname{cis}(\theta + \varphi)\end{aligned}$$

הערה

מהטענה האחרונה, ניתן להסיק שאם $z = r \operatorname{cis}(\theta)$ ו- $w = \rho \operatorname{cis}(\varphi)$, אז:

$$\frac{z}{w} = z \cdot w^{-1} = \frac{r}{\rho} \operatorname{cis}(\theta - \varphi)$$

מהמשפט האחרון, נסיק את משפט דה מואבר:

משפט 7.18 – (משפט דה מואבר)

יהי $z = r \operatorname{cis}(\theta)$, ויהי $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

הוכחה

נוכיח באינדוקציה. בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$ הטענה מידית.
נניח נכונות עבור n ונסיק אותה עבור $n + 1$:

$$z^{n+1} = z^n \cdot z = r^n \operatorname{cis}(n\theta) \cdot r \operatorname{cis}(\theta) = r^{n+1} \operatorname{cis}((n+1)\theta)$$

והוכחנו את טענת האינדוקציה.

7.3.3 חישוב שורשים מרוכבים

נניח שנתון לנו $w = \rho \operatorname{cis}(\varphi) \in \mathbb{C}$ ו- $n \in \mathbb{N}$. נניח שאנחנו רוצים למצוא את כל הפתרונות למשוואה:

$$z^n = w$$

נכתוב $z = r \operatorname{cis}(\theta)$. ממשפט דה מואבר:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

כלומר:

$$r^n \operatorname{cis}(n\theta) = \rho \operatorname{cis}(\varphi)$$

מכך נובע:

$$\begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \varphi + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \implies \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \end{cases} \quad k=0,1,2,\dots,n-1$$

תרגיל 7.19

מצאו את כל הפתרונות למשוואה:

$$z^4 = 1$$

פתרון:

ראשית, נמיר את המספר $w = 1$ להצגה פולארית. נכתוב $w = \rho \operatorname{cis}(\varphi)$

$$\begin{aligned} \rho &= |w| = 1 \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

כלומר, $w = \text{cis}(0)$. בעת נרשום $z = r \text{cis}(\theta)$. ידוע לנו ש-

$$r^4 \text{cis}(4\theta) = z^4 = w = \text{cis}(0)$$

לכן:

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{1} = 1 \\ \theta = \frac{0}{4} + \frac{2\pi k}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

כלומר, הפתרונות של המשוואה הם:

$$\begin{aligned} z_1 &= \text{cis}(0) = 1 \\ z_2 &= \text{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i \\ z_3 &= \text{cis}(\pi) = -1 \\ z_4 &= \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i \end{aligned}$$

7.4 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
5	מבחן לדוגמה
2	3.8.17
4	7.9.17
6	26.9.17
3*	12.1.18
4	25.5.18
7	2.8.18
1	26.10.18
6*	26.10.18
5	28.12.18
5*	24.5.19
2	6.8.19
3	20.9.19
4	21.5.20
4	19.6.20
4	30.10.20
2	16.2.21
5	7.5.21
3	23.7.21
5	10.9.21
5	31.12.21
6	8.4.22
3	1.7.22
2	19.8.22
5	27.1.23
6	7.7.23
4	8.9.23
5	1.3.24
1	12.7.24
5	20.9.24
5	17.1.25

8 קומבינטוריקה

קומבינטוריקה היא ענף במתמטיקה, העוסק בספירה. כמעט בכל תחומי המתמטיקה נעשה שימוש תדיר בכלי קומבינטוריים. אנחנו נכיר שני נושאים בסיסיים בקומבינטוריקה. כל הקבוצות בהן נתמקד בפרק הזה הן סופיות.

8.1 עיקרון הסכום והמכפלה

ראשית, נזכר במספר דברים שכבר ראינו בקורס:

1. בהנתן קבוצה A , $|A|$ מציין את מספר האיברים ב- A .
 2. לכל $n \in \mathbb{N}$ הגדרנו את הקבוצה $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.
 3. קבוצת הפונקציות החח"ע ועל מ- $[n]$ ל- $[n]$ תסומן ב- S_n .
- כמו כן, ראינו את שתי העובדות הבאות, להן ניתן שם מעתה.

הגדרה 8.1 – (עיקרון הסכום והמכפלה)

1. לכל A, B זרות, $|A \cup B| = |A| + |B|$. מעתה נקרא לעובדה זו עיקרון הסכום.
2. לכל A, B מתקיים: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. מעתה נקרא לעובדה זו עיקרון המכפלה.

8.2 תרגיל

תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות.

1. הוכיחו באינדוקציה כי אם כל שתי קבוצות זרות אחת מהשניה:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$$

2. הוכיחו באינדוקציה:

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$$

8.3 תרגיל

כמה אפשרויות יש לתוצאת הטלת קוביה שחורה וקוביה לבנה?

פתרון:

לכל אחת מהקוביות יש 6 אפשרויות לתוצאה. מכיוון שהקוביות שונות, ניתן לכתוב את תוצאות ההטלה כזוגות סדורים. כלומר, קבוצת האפשרויות להטלה היא $[6] \times [6]$, ומעיקרון הכפל, יש בה 36 איברים.

תרגיל 8.4

כמה מספרים טבעיים אי זוגיים בעלי ספרת אחדות ועשרות שונות יש בקטע $[0, 99]$?

פתרון:

מספר טבעי אי זוגי, הוא מספר בעל ספרת אחדות הנבחרת מתוך הקבוצה $A_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. ספרת העשרות של המספר, תבחר מתוך הקבוצה $A_2 = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. מעיקרון הכפל, $|A_1 \times A_2| = 5 \cdot 10 = 50$. כעת, נשים לב שלא התייחסנו לתנאי השני. נחפש כמה מספרים אי זוגיים לא מקיימים את התנאי השני. אלו בדיוק המספרים:

$$\{11, 33, 55, 77, 99\}$$

לכן מספר המספרים שמקיימים את הדרוש הוא $50 - 5 = 45$.

8.2 בחירת עצמים מתוך קבוצה

נניח שיש לנו שק עם n עצמים, ואנחנו נרצה לשלוף מתוכו k פעמים. נשאלת השאלה, כמה אפשרויות שונות יש לתוצאות השליפה. לשאלה הזאת יש 4 אפשרויות שונות, כתלות בהאם אנחנו חשוב לנו סדר העצמים, והאם נחזיר את העצמים לשק בין שליפה לשליפה. נביר 3 מהקומבינציות הללו.

8.2.1 שליפה עם החזרה ועם חשיבות לסדר

טענה

מספר האפשרויות לשלוף k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים, עם החזרה ועם חשיבות לסדר, הוא n^k .

הוכחה

ראשית נשאל את עצמנו כמה אפשרויות יש לבחירת העצם הראשון? התשובה היא כמובן n . כל אחד מ- n איברי הקבוצה יכול להיות הראשון אותו נשלוף. לאחר השליפה הראשונה, נחזיר את העצם ששלפנו בחזרה לקבוצה ונשאל את עצמנו כמה אפשרויות יש לבחירת העצם השני. מאותו נימוק, התשובה שוב תהיה n . מכיוון שיש חשיבות לסדר האיברים שנשלוף, מעיקרון הכפל, היו לנו עד כה n^2 אפשרויות לבחירת שני העצמים הראשונים. כעת, לאחר שהצגנו את הרעיון שמאחורי ההוכחה, ההוכחה המלאה באמצעות אינדוקציה על k תושאר כתרגיל.

תרגיל 8.5

כמה סדרות מאורך 3 עם איברים מ- $\{0, 1\}$ יש?

פתרון:

בסדרה יש חשיבות לסדר האיברים. כמו כן, אין תלות בין הבחירות שלנו. לכן תשובה זו שקולה לבחירת 3 עצמים מקבוצה בגודל 2 עם החזרה ועם חשיבות לסדר. יש $2^3 = 8$ אפשרויות.

8.2.2 שליפה ללא החזרה ועם חשיבות לסדר

הגדרה 8.6 – (עצרת)

לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר את $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.
נגדיר גם את $0! = 1$.

הגדרה 8.7 – (n בחרי k)

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $0 \leq k \leq n$ שלם, נגדיר את המספר n בחרי k :

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

טענה

מספר האפשרויות לשלוק k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים, ללא החזרה ועם חשיבות לסדר, הוא:

$$\binom{n}{k} \cdot k! = \frac{n!}{(n-k)!}$$

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על k . נבחין שמכיוון שאנחנו לא מחזירים את העצמים לאחר כל בחירה, $1 \leq k \leq n$.
בסיס האינדוקציה: עבור $k = 1$, יש n אפשרויות לבחירה, ואכן:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

צעד האינדוקציה. נניח שהטענה נכונה עבור k ונוכיח עבור $k+1$. נניח כמובן ש- $k+1 \leq n$.
על כל שליפה של $k+1$ עצמים, ניתן לחשוב כשליפה של k עצמים ולאחר מכן שליפה של עצם נוסף.
לאחר ששלפנו k עצמים, נותרו $n-k$ עצמים מתוכם נוכל לבחור בשליפה ה- $k+1$. לכן יש $n-k$ אפשרויות לבחירה ה- $k+1$.
מהנחת האינדוקציה, יש לנו $\frac{n!}{(n-k)!}$ אפשרויות לבחירת k העצמים הראשונים. לכן מעיקרון הכפל, מספר האפשרויות לבחירה של $k+1$ עצמים היא:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot (n-k) = \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (n-k)} \cdot (n-k) = \frac{n!}{(n-k-1)!} = \frac{n!}{(n-(k+1))!}$$

והוכחנו את הדרוש.

תרגיל 8.8

בכמה דרכים ניתן לסדר n חתולים בשורה?

פתרון:

נשים את החתולים בצד כקבוצה. כל סידור של החתולים בשורה, שקול להוצאה של החתולים מתוך הקבוצה, עם חשיבות לסדר וללא החזרה. מספר הדרכים להוציא n חתולים מקבוצה של n חתולים בתנאים הללו הוא $n! = \frac{n!}{(n-n)!}$.

תרגיל 8.9

בכמה דרכים ניתן לסדר n חתולים במעגל?

פתרון:

נסמן את מספר הדרכים ב- X . נשים לב שמכל סידור של החתולים במעגל, ניתן לייצר n סידורים שונים של החתולים בשורה. זאת באמצעות בחירת חתול שיהיה הקצה השמאלי של השורה. לכן בספירת מספר הסידורים האפשריים של החתולים בשורה, נספור כל סידור אפשרי של החתולים במעגל, n פעמים. לכן:

$$X = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

תרגיל 8.10

כמה מילים שונות ניתן ליצור על ידי ערבוב האותיות במילה 'ממלמלת'?

פתרון:

ראשית נספור את מספר המילים שניתן לייצר, מבלי הגבלת המילים להיות מילים שונות. כבר ראינו שמכיוון שבמילה 'ממלמלת' יש 6 אותיות, התשובה לכך היא $6!$. כעת נבדוק כמה פעמים ספרנו כל מילה. מכיוון שהאות מ' מופיעה 3 פעמים, על כל סידור של האותיות, ניתן לעשות החלפה בסדר של ה-מ' השונות, ולקבל עדיין את אותה מילה. כלומר, מספר הפעמים שספרנו כל מילה בשל העובדה שהאות מ' מופיעה 3 פעמים, שקול למספר הסידורים של שלוש ה-מ' בשורה, $3!$. באותו אופן, כך מתקיים בשל העובדה שהאות ל' מופיעה פעמיים. כלומר, בסה"כ ספרנו כל מילה $3!2!$ פעמים. לכן מספר המילים השונות שניתן להרכיב מערבוב האותיות במילה ממלמלת, הוא:

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

8.2.3 שליפה ללא החזרה וללא חשיבות לסדר**טענה**

מספר האפשרויות לשלוף k עצמים מתוך קבוצה בת n עצמים, ללא החזרה וללא חשיבות לסדר, הוא $\binom{n}{k}$.

הוכחה

נסמן ב- X את כמות האפשרויות. נבחין שכל בחירה, יכולה להתקבל על ידי $k!$ בחירות שונות של בחירות עם חשיבות לסדר.

זאת מכיוון שאת k העצמים שבחרנו, נוכל לסדר ב- $k!$ דרכים שונות, להיות הסדר בו נבחרו העצמים בבחירה ללא החזרה ועם חשיבות לסדר. לכן:

$$X = \frac{\binom{n}{k} \cdot k!}{k!} = \binom{n}{k}$$

8.11 תרגיל

כמה תתי קבוצות בגודל k יש ל- $[n]$?

פתרון:

נראה שהתשובה היא $\binom{n}{k}$. אכן, כל תת קבוצה מגודל k של n היא בחירה של k מספרים שונים מתוך $[n]$. מכיוון שבתת הקבוצה בגודל k אין חשיבות לסדר האיברים, בחירה זו מתבצעת ללא חשיבות לסדר. מהטענה הקודמת, יש $\binom{n}{k}$ אפשרויות כאלו.

8.12 תרגיל

צפרדע עומדת בראשית הצירים $(0, 0)$ ורוצה להגיע לנקודה $(12, 18)$. הצפרדע יודעת רק להתקדם בקפיצה באורך 1 ימינה או למעלה. בכמה דרכים שונות יכולה הצפרדע להשלים את המסע?

פתרון:

המסע של הצפרדע יארוך $12 + 18 = 30$ צעדים. עליה לבחור באילו מתוך הצעדים, היא תבחר להתקדם ימינה, ובאילו מהצעדים תתקדם למעלה. קבוצת האינדקסים של צעדי הצפרדע היא $[30]$ ומתוכה, על הצפרדע לבחור 12 אינדקסים, אשר בצעדים שלהם תתקדם ימינה. כלומר, השאלה שקולה לשאלה, כמה תתי קבוצות בגודל 12 יש ל-30. מהתרגיל הקודם, התשובה היא $\binom{30}{12}$.

8.2.4 תרגילים מסכמים

נסכם את הנושא בשני תרגילים החוצים בין אפשרויות הבחירה.

8.13 תרגיל

כמה פונקציות יש מהקבוצה $A = [3]$ לקבוצה $B = [10]$.

1. ללא דרישות נוספות.

2. חח"ע.

3. מונוטוניות עולות חזק.

פתרון:

1. נבחר מ- B שלושה איברים עם החזרה ועם חשיבות לסדר $\{b_1, b_2, b_3\}$. נגדיר לכל בחירה כזו פונקציה $f: A \rightarrow B$ על ידי:

$$f(1) = b_1$$

$$f(2) = b_2$$

$$f(3) = b_3$$

כלומר יש התאמה בין פונקציות מ- A ל- B לבין בחירות עם חשיבות לסדר. לכן מספר הפונקציות הוא 10^3 .

2. נחזור בצורה אנאלוגית על הסעיף הקודם, אך הפעם לא נאפשר החזרה, כדי לקבל פונקציות חח"ע. לכן מספר הפונקציות הוא $\frac{10!}{7!}$.

3. נבחין שכל בחירה של שלושה איברים מ- B ללא חשיבות לסדר ולא החזרה, מגדירה לנו במפורש פונקציות מונוטונית עולה חזק יחידה. כיצד? נגדיר את $f: A \rightarrow B$ כך ש- $f(1)$ יהיה המספר הקטן מבין השלושה שבחרנו מ- B , את $f(2)$ להיות האמצעי, ואת $f(3)$ להיות הגדול מביניהם. לכן, מספר הפונקציות יהיה $\binom{10}{3}$.

תרגיל 8.14

על מדף 3 ספרי מתמטיקה, 10 ספרי מתח ו-2 ספרי בדיחות. כל הספרים שונים זה מזה. בכמה דרכים ניתן לסדר את הספרים על המדף, כך שהספרים מאותו הסוג יהיו יחד?

פתרון:

ראשית, נבחר באיזה סדר להציב על המדף את הסוגים השונים של הספרים. מכיוון שיש 3 סוגים, יש 3! דרכים לסידור כזה. כעת, בתוך כל אחד מהסוגים, יש לבחור את סדר הספרים. 3! אפשרויות לסדר את ספרי המתמטיקה, 10! אפשרויות לסדר את ספרי המתח ו-2! דרכים לסדר את ספרי הבדיחות. לכן מספר האפשרויות לסידור הוא:

$$3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 10!$$

8.3 שובך היונים

בפרק זה נביר את עיקרון שובך היונים. הניסוח של עיקרון זה אינטואיטיבי, אך מאפשר לנו להוכיח טענות רבות באופן מתמטי ומסודר.

משפט 8.15 – (עיקרון שובך היונים)

יהי $n \in \mathbb{N}$. אם נכניס $n + 1$ יונים ל- n שובכים, אז בהכרח קיים שובך עם לפחות 2 יונים.

הטענה נשמעת הגיונית, ובכל זאת נוכיח אותה באופן מתמטי:

הוכחה

נמספר את השובכים במספרים $1, \dots, n$. לכל חלוקה של היונים לשובכים, נסמן ב- p_i את מספר היונים בשובך ה- i . נניח בשלילה שקיימת חלוקה, בה בכל שובך תהיה לכל היותר יונה יחידה. אז:

$$n + 1 = \sum_{i=1}^n p_i \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

כאשר השוויון הראשון מתקיים מכיוון שיש בסה"כ $n + 1$ יונים. קיבלנו $n + 1 \leq n$ בסתירה, ולכן בכל חלוקה יהיה שובך בו יש לפחות שתי יונים.

בתרגילים אותם נפגוש בנושא הזה, לעיתים נשתמש בעיקרון שובך היונים כטענת עזר, ולעיתים נפתור את התרגיל באופן ישיר, בצורה שתזכיר את ההוכחה של עיקרון שובך היונים.

דוגמה 8.16

בכל קבוצה של 367 אנשים, יש לפחות שני אנשים שנולדו באותו תאריך. מדוע זה נכון? יונים: האנשים.

שובכים: 366 ימות השנה (כולל ה-29.2).

נבצע התאמת יונים לשובכים בצורה הבאה. את היונה שמתאימה לפלונית נתאים לשובך שמתאים לתאריך הלידה שלה.

מעיקרון שובך היונים, קיים שובך (תאריך) בו נמצאות שתי יונים. כלומר, קיימות פלונית ואלמונית שנולדו באותו תאריך.

תרגיל 8.17

תהא $A \subseteq [9]$, ונניח ש- $|A| = 6$. הוכיחו שקיימים $a \neq b \in A$ כך ש- $a + b = 10$.

פתרון:

נפתור באמצעות שובך היונים:

יונים: 6 איברי הקבוצה A .

שובכים: הקבוצות $\{i, 10 - i\}$ לכל $i \in [5]$.

נתאים את היונה ה- a לשובך $\{i, 10 - i\}$ אם $a \in \{i, 10 - i\}$.

מעיקרון שובך היונים קיימים $i \in [5]$ ו- $a \neq b \in A$ כך ש- $a, b \in \{i, 10 - i\}$. מכיוון שאלו איברים שונים, נובע $a + b = i + 10 - i = 10$.

תרגיל 8.18

נתונה קבוצה של 129 תלמידות. במשך שבוע, כל תלמידה תחליט האם לאכול או לאכול פיצה באותו יום.

1. כמה אפשרויות שונות לסדרת בחירות יש לכל תלמידה?

2. הוכיחו שקיימות לפחות שתי תלמידות שיאכלו פיצה בדיוק באותם הימים במהלך השבוע.

פתרון:

1. בכל יום כל תלמידה בוחרת האם לאכול פיצה או לא. כלומר, מתבצעת בחירה בין שתי אפשרויות, עם חשיבות לסדר ועם חזרות. לכן ישנן $2^7 = 128$ אפשרויות לכך.
2. נוכיח באמצעות שובך היונים.
יונים: 129 התלמידות.
שובכים: 128 האפשרויות לסדרת בחירות.
נתאים כל תלמידה לסדרת הבחירות שלה. מעיקרון שובך היונים, ישנן שתי תלמידות שיאכלו פיצה בדיוק באותם הימים לאורך השבוע.

תרגיל 8.19

- בטורניר שח, מתמודדות $n \in \mathbb{N}$ שחקניות. כל זוג שחקניות תשחקנה יחד בדיוק פעם אחת במהלך הטורניר. נניח שבכל יום משוחק משחק יחיד עד לסיומו.
1. כמה ימים יוארך הטורניר?
 2. הוכיחו שבסוף כל יום, ישנן שתי שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.

פתרון:

1. כל זוג שחקניות תשחקנה יחד פעם אחת בדיוק. כלומר, השאלה היא למעשה: כמה זוגות ניתן לבחור מתוך קבוצה של n שחקניות, והתשובה לכך היא $\binom{n}{2}$.
2. נחלק למקרים:
אם יש שתי שחקניות שטרם שיחקו, הן תהיינה הזוג.
אם כל השחקניות שיחקו עד כה, נשתמש בשובך היונים.
יונים: n שחקניות.
שובכים: המספרים $\{1, \dots, n-1\}$.
נתאים בין כל שחקנית לשובך המתאים למספר המשחקים ששיחקה עד כה (לפחות פעם אחת, ולכל היותר $n-1$, מספר המשחקים שתשחק בסך הכל). מעיקרון שובך היונים, ישנו זוג שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.
במקרה האחרון, ישנה שחקנית יחידה שטרם שיחקה. שאר $n-1$ השחקניות, שיחקו לכל הפחות פעם אחת ולכן היותר $n-2$ פעמים (כי אף אחד לא שיחקה נגד השחקנית שטרם שיחקה). לכן בדומה למקרה הקודם, ישנו זוג שחקניות ששיחקו עד כה את אותו מספר משחקים.

תרגיל 8.20

- על הישר הממשי נתון הקטע $A = [0, n]$, כאשר $n \in \mathbb{N}$. תהא $B \subseteq A$ קבוצה של $n+2$ נקודות. לכל $1 \leq i \leq n$, נסמן ב- $I_i = [i-1, i]$ הוכיחו שאחד מהתנאים הבאים מתקיים:
1. קיים $1 \leq i \leq n$ עבורו $|B \cap I_i| \geq 3$.
 2. קיימים $1 \leq i, j \leq n$ כך ש- $i \neq j$ ו- $|B \cap I_i| \geq 2, |B \cap I_j| \geq 2$.

פתרון:

ראשית נבין את מה שמוגדר בהשאלה. לכל $1 \leq i \leq n$, הביטוי $p_i = B \cap I_i$ מציין את מספר הנקודות מ- B שנמצאות בקטע I_i .

כעת, נפתור את התרגיל בדומה להוכחת עיקרון שובר היונים. נניח בשלילה ששני התנאים לא מתקיימים. אז $p_i \leq 2$, לכל $1 \leq i \leq n$, וכמו כן קיים לכל היותר j יחיד עבורו לא מתקיים $p_j \leq 1$. נחלק למקרים. במקרה הראשון, $p_i \leq 1$ לכל $1 \leq i \leq n$. ואז:

$$n + 2 = \sum_{i=1}^n p_i \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$$

קיבלנו $n + 2 \leq n$, אך זה לא ייתכן.

במקרה השני, $p_i \leq 2$, לכל $1 \leq i \leq n$, וקיים j יחיד עבורו מתקיים $p_j = 2$. במקרה זה:

$$n + 2 = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n p_i + p_j \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n 1 + 2 = n - 1 + 2 = n + 1$$

קיבלנו $n + 2 \leq n + 1$ וגם זה לא ייתכן.

8.4 תרגילים ממבחנים

התרגילים הבאים מבוססים רק על הנושאים שנלמדו עד כה בקורס. תרגילים המסומנים בכוכבית נועדו לבחון התמודדות עם כלים שלא נלמדו בקורס. במקרה של חוסר הצלחה, מומלץ לקרוא את פתרון התרגיל.

תרגיל	מועד
7	מבחן לדוגמה
9	מבחן לדוגמה
3	3.8.17
2	7.9.17
2*	26.9.17
2	12.1.18
7	25.5.18
1	2.8.18
2*	16.9.18
2	26.10.18
5	26.10.18
4	28.12.18
4	24.5.19
6	6.8.19
6	20.9.19
1	10.1.20
5	21.5.20
6**	21.5.20
5	19.6.20
6*	30.10.20
3	16.2.21
6	7.5.21
6	23.7.21
4	10.9.21
5	8.4.22
6	1.7.22
5	19.8.22
3	27.1.23
2	7.7.23
5	8.9.23
4	1.3.24
6	12.7.24
6	20.9.24
6	17.1.25