מתמטיקה
שכדאי לדעת

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל אביב

על בעיות פשיטת רגל בתורת המשחקים

אוריאל וינץ ואורן יובל

בית הספר למדעי המתמטיקה

אוניברסיטת תל אביב

מתמטיקה
שכדאי לדעת

על בעיות פשיטת רגל בתורת המשחקים

אוריאל וינץ ואורן יובל

בית הספר למדעי המתמטיקה

אוניברסיטת תל אביב

על בעיות פשיטת רגל בתורת המשחקים

כתיבה: **אוריאל וינץ ואורן יובל** בית הספר למדעי המתמטיקה אוניברסיטת תל אביב
מנהל פרויקט **כדאי לדעת**: פרופ׳ אילון סולן
עריכה פדגוגית ומקצועית: אילון סולן
עריכת לשון: ד״ר דנה ברעם
רכזת אדמיניסטרטיבית: מיכל זוהר
עיצוב גרפי ועימוד: ניצן-שמיר מעצבים
איורים: istock
איור עטיפה: shutterstock
כתובת אתר **כדאי לדעת**: goodtoknow.tau.ac.il

אנחנו מודים לתלמידי כיתות ז 3 ו-ז 4 מחטיבת הביניים שמואל הנגיד בהרצליה שלמדו מהחוברת והעירו הערות ששיפרו אותה, וכן אנחנו מודים למורות דפנה סביר ובטי כהן.

זכויות הקניין הרוחני, לרבות זכויות היוצרים והזכות המוסרית של היוצרים בחומר זה, מוגנות.

השימוש בחוברות, שמירתן במאגרי מידע והפצתן מותר לצורך שימוש לא מסחרי בלבד. בעת שמירה במאגרי מידע, יש לציין במפורש שהחוברת שייכת לפרויקט ״כדאי לדעת״ ולצרף קישור לאתר הפרויקט. השימוש לכל מטרה מסחרית וליצירה של חומרים נגזרים אסור ללא קבלת רשות מפורשת בכתב מהנהלת הפרויקט.

תוכן

1 מה היא בעיית פשיטת רגל? 4

2. תכונות של פתרון לבעיית פשיטת רגל וכלל חלוקה 9

2.1 תכונות של פתרונות 9

2.2 כללי חלוקה 13

3. כללי חלוקה בסיסיים ותיאור ציורי של כללי חלוקה 22

4. כללי חלוקה מתקדמים 34

4.1 כלל מזעור נזקים 34

4.2 כלל החלוקה "שניים אוחזין בטלית" 37

4.3 כלל החלוקה של רבי נתן 44

5 סיכום 48

6 פתרונות לתרגילים 49

7. לקריאה נוספת 72

1. מהי בעיית פשיטת רגל?

פשיטת רגל היא מצב שבו אדם, חברה או מדינה אינם מסוגלים לעמוד בהתחייבויותיהם הכלכליות כלפי הנושים שלהם, כלומר כלפי אנשים או גופים שהלוו להם כסף. מצב זה אינו נוח לנוגעים בדבר (במיוחד לנושים), ונדרש טיפול הוגן במצב, שיקטין את התסכול ואת עוגמת הנפש של הנושים.

לאורך ההיסטוריה ננקטו דרכים שונות לטיפול במצבים של פשיטת רגל:

- ביוון העתיקה, אדם שהוכרז פושט רגל נידון יחד עם משפחתו לעבדות לפרק זמן מסוים, כדי שיוכל להחזיר את חובותיו.
- באימפריה המונגולית, יש עדויות שנהג חוק שלפיו לאחר הפעם השלישית שאדם הוכרז פושט רגל הוא הוצא להורג.
- בעולם המודרני, החוק מגן על אדם שהוכרז פושט רגל מפני עונשים כאלה ומאפשר לו "להתחיל מחדש", כדי לעודד פעילות עסקית.

הבה נתבונן בסיפורו (הדמיוני) של יואל, שהחליט לפתוח מסעדה בעיר מגוריו. לאחר שחישב את העלויות וההכנסות הצפויות, הגיע יואל למסקנה שהוא זקוק לסכום של 100,000 ₪ כדי לפתוח את המסעדה ולתחזק אותה במשך שנה. ליואל היו חסכונות בסך 40,000 ₪ ולכן הוא פנה לחבריו הטובים יוסי ואילן, שהסכימו להלוות לו את הסכום החסר: יוסי הלווה ליואל 40,000 ₪ ואילן 20,000 ₪. לשניהם הבטיח יואל שיחזיר את חובו בתום שנה.

לאחר שנה היה ברור ליואל שהמסעדה איננה רווחית והוא הכריז על פשיטת רגל. יואל היה צריך להחזיר סכום של 60,000 ₪ לשני חבריו, אך לצערו לא היה לו רכוש למעט המסעדה, וממכירת תכולת המסעדה התקבלו 30,000 ₪ בלבד.

כיצד נכון לחלק את הסכום שהתקבל, 30,000 ₪, בין יוסי לאילן?

בחוברת זו נראה שיטות שונות לחלוקת ההון הקיים בין הנושים ונעמוד על היתרונות והחסרונות בכל אחת מהשיטות. נוסף על כך, באמצעות בחינת בעיות פשיטת רגל נלמד שיטה כללית לגשת לבעיות שבהן אנחנו נתקלים בחיי היום-יום.

תרגיל 1: הציעו שתי דרכים שונות לחלוקת הסכום 30,000 ₪ בין יוסי לאילן. הסבירו את השיקולים לבחירה בכל אחת מהאפשרויות.

על פי החוק, פשיטת רגל נוגעת לבני אדם יחידים, ואילו חברות שאינן יכולות להחזיר את חובותיהן נכנסות להליך שנקרא "פירוק". בעבורנו אין הבדל בין שני המקרים, ובעיית פשיטת רגל תוגדר כך:

פשיטת רגל היא מצב שבו אדם או חברה התחייבו להעביר ליותר מגוף אחד רכוש בעל ערך כלשהו ואינם יכולים לעמוד בכל התחייבויותיהם.

הגורמים שהובטחו להם סכומי כסף נקראים נושים. לכל נושה יש דרישה הנובעת מההתחייבות כלפיו. סך ההון שאפשר לחלק בין הנושים נקרא הרכוש של פושט הרגל. כאשר סך דרישות הנושים גדול מערך רכושו של הגורם שהתחייב כלפיהם, אי-אפשר להחזיר את מלוא החובות ומתקבלת בעיית פשיטת רגל.

בתיאור בעיית פשיטת רגל הנחנו שהחוב לנושים הוא חוב כספי. עם זאת, כפי שנראה בדוגמאות בהמשך החוברת, ייתכן שהחוב אינו כספי. לדוגמה, ייתכן שאדם הבטיח לחבריו גולות, קלפי משחק או סוכריות, ואינו יכול לתת להם את מספר הגולות, הקלפים או הסוכריות שהבטיח. במקרה כזה החוב אינו נמדד בשקלים אלא במספר גולות, מספר קלפים ומספר סוכריות.

פתרון לבעיית פשיטת רגל הוא הצעה לחלוקת הרכוש בין הנושים.

דוגמה - בעיית העוגה: בתחרות השירה השנתית של תלמידי כיתה ח הבטיחה המורה שהפרס יהיה עוגה שמשקלה 600 גרם, והיא תחולק בין התלמידים שיגיעו לשלושת המקומות הראשונים כך:

- מקום ראשון: 300 גרם
- מקום שני: 200 גרם
- מקום שלישי: 100 גרם

המנצחים בתחרות היו: מיטל במקום הראשון, יוני בשני ויסמין בשלישי.

בגלל טעות של המאפייה שממנה הוזמנה העוגה, נאפתה עוגה שמשקלה 500 גרם בלבד.

תרגיל 2: איך תחלקו את העוגה בין המנצחים? הסבירו את שיקוליכם.

דוגמה - בעיית דמי הכיס: ביום שני בבוקר הבטיחה אימא של רם ושל יותם להשאיר על שולחן האוכל סכום כסף שישמש אותם לאחר שובם מבית הספר לקניית אוכל ולבילוי בקניון. לרם, האח הבכור, הובטחו 80 שקלים, וליותם - 50 שקלים.

נפלה טעות בידי האם, והיא השאירה על השולחן 100 שקלים במקום 130. כשחזרו הילדים לביתם מבית הספר וגילו את הטעות, התקשרו לאם לברר כיצד לחלק את הכסף.

תרגיל 3: מה הייתם עונים במקום האם? נמקו את תשובתכם.

דוגמה - בעיית הירושה: על פי חוקי היהדות, טרם הנישואים החתן מתחייב בפני הכלה שאם יתגרשו בעתיד הוא ישלם לה סכום מסוים הנקוב בכתובה ונקרא "סכום הכתובה", ואם ימות לפניה, ישולם לה סכום זה מתוך עזבונו. במשנה, בפרק י של מסכת כתובות, דנים במקרה שיש לחלק את עזבונו של אדם בין שלוש אלמנותיו, בעוד העיזבון אינו גדול דיו לכסות את סכום כתובותיהן של שלוש הנשים. ועל כן נוצרת בעיית פשיטת רגל.

בבעיה המוצגת במשנה, סכום כתובתה של האישה הראשונה 100 דינר, של השנייה 200 דינר ושל השלישית 300. נקרא לשלוש הנשים רחל, חנה ודבורה. המשנה מציגה שלושה מקרים של הבעיה, שבהם עזבונו של הבעל הוא 100, 200 ו-300 דינר, ומציעה פתרון זה:

עזבון	רחל	חנה	דבורה
	100	200	300
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

כאשר העיזבון הוא 100 דינר, המשנה אומרת שיש לחלק אותו שווה בשווה בין שלוש הנשים. כאשר העיזבון הוא 200 דינר, דבורה וחנה מקבלות 75 דינר ורחל מקבלת 50 דינר. וכאשר העיזבון הוא 300 דינר, כל אישה מקבלת מחצית מכתובתה.

תרגיל 4: (א) לפי דעתכם, איזו אישה מרוצה פחות בכל אחד מהמקרים? נמקו את תשובתכם.

(ב) האם אתם מבחינים בהיגיון של הפתרון המוצע במשנה?

דוגמא - בעיית שניים אוחזין בטלית משנה א במסכת בבא מציעא דנה בשאלה כיצד יש לחלק טלית, ששני אנשים חפצים בה:

> שניים אוחזין בטלית, זה אומר: "אני מצאתיה", וזה אומר: "אני מצאתיה"; זה אומר: "כולה שלי", וזה אומר: "כולה שלי"; זה יישבע שאין לו בה פחות מחציה, וזה יישבע שאין לו בה פחות מחציה; ויחלוקו. זה אומר: "כולה שלי", וזה אומר: "חציה שלי"; האומר "כולה שלי", יישבע שאין לו בה פחות משלושה חלקים, והאומר "חציה שלי", יישבע שאין לו בה פחות מרביע; זה נוטל שלושה חלקים, וזה נוטל רביע.

במילים אחרות, המשנה פוסקת שאם כל אחד מהצדדים טוען כי הרכוש שייך לו, הרכוש יתחלק בין שניהם שווה בשווה. אם אחד הצדדים טוען שהרכוש שלו והשני טוען כי מחצית הרכוש שייכת לו, החלוקה היא $\frac{3}{4}$ ו-$\frac{1}{4}$, בהתאמה.

נסביר את ההיגיון של הפתרון המוצע במשנה:

אם הדרישה של שני הצדדים שווה, מטעמי סימטריה כל אחד יקבל חצי מהרכוש. אם האחד דורש את מלוא הרכוש והאחר רק חצי ממנו, הרי שניהם מסכימים שמחצית מהרכוש שייכת לראשון, והוא מקבל אותה. כלומר, את החלק ברכוש שעליו אין מחלוקת נותנים לראשון, ואת החלק שעליו השניים דורשים בעלות מחלקים מטעמי סימטריה שווה בשווה.

תרגיל 5: הציעו אופן חלוקה שונה מהמוצע במשנה למקרה שבו צד אחד טוען שכל הטלית שייכת לו והצד האחר טוען שמחצית הטלית שייכת לו. נמקו את ההצעה.

תרגיל 6: (א) חשבו על בעיית פשיטת רגל הקשורה לחיי היום-יום שלכם. תארו אותה והציגו ערכים מספריים לרכוש ולדרישה של כל נושה.

(ב) הציעו פתרון ליישוב הבעיה שהצגתם ונמקו את הצעתכם.

2. תכונות של פתרון לבעיית פשיטת רגל וכלל חלוקה

לאחר שהגדרנו מהי בעיית פשיטת רגל ומהו פתרון לבעיה כזו (כלומר, חלוקה של הרכוש בין הנושים), נרצה להכיר דרכים לחישוב פתרון אפשרי לבעיה נתונה.

יש אין-סוף דרכים לחלק את הרכוש הקיים בין הנושים בבעיה נתונה. למשל בדוגמה של חלוקת העוגה, אפשר לתת למיטל כל כמות עוגה בין 0 ל-500 גרם, ליוני כל כמות עוגה בין 0 לכמות שנותרה אחרי שמיטל קיבלה את חלקה, וליסמין את השארית. חלק ניכר מהפתרונות האפשריים אינם הוגנים. למשל, הפתרון שבו מיטל, שזכתה במקום הראשון, תקבל את העוגה כולה (500 גרם) אף שהובטחה לה פרוסה של 300 גרם ויוני ויסמין לא יקבלו דבר, נראה פתרון בלתי הוגן. המטרה שלנו היא למצוא פתרונות הוגנים לחלוקת הרכוש בין הנושים.

מהו פתרון הוגן? אנשים שונים יפרשו את המושג 'הוגן' בדרכים שונות. בסעיף זה נציג תכונות של פתרון שייראו הוגנות בעיני מרבית האנשים, וננסה למצוא פתרונות המקיימים תכונות אלה. פתרונות אלה ייחשבו הוגנים בעיני מרבית האנשים.

ראשית נדון בתכונות רצויות של פתרון בעיית פשיטת רגל מסוימת.

2.1. תכונות של פתרונות

להדגמת התכונות נשתמש בבעיה זו:

חברת "הכול בזול" מעוניינת לפתוח סניף חדש באילת. מכיוון שלחברה אין די הון כדי לממן את פתיחת הסניף, היא פנתה לאנשים פרטיים לקבל הלוואות לתקופה של שנתיים. אדם שהלווה לחברה סכום כסף קיבל בתמורה שטר חוב שעליו רשום הסכום שהחברה צריכה להחזיר לו לאחר שנתיים. החברה קיבלה הלוואות מארבעה אנשים בסכומים אלה:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪

אחרי תקופה קצרה הודיעה החברה על פשיטת רגל, והיה בידה סכום של 500,000 ₪ להחזר ההלוואות. כיצד יחולק סכום זה בין ארבעת הנושים?

כעת נדון בתכונות רצויות לפתרון בעיית פשיטת רגל בכלל ולפתרון הבעיה המוצגת בדוגמה בפרט.

נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו - בעיית פשיטת רגל נוצרת כאשר סכום החובות עולה על הרכוש הנתון, ולכן בהכרח חלק מהנושים יקבלו פחות מהסכום שחייבים להם. דרישה טבעית היא שאף נושה לא יקבל יותר מהסכום שחייבים לו בו-בזמן שאחרים יקבלו פחות מהסכום שחייבים להם.

למשל: בבעיה המוצגת, פתרון שבו ליאת תקבל 500,000 ₪ (שהם 200,000 ₪ יותר מהחוב שחייבים לה) ואילו כל השאר לא יקבלו דבר, אינו מקיים תכונה זו.

לעומת זאת, תכונה זו כן מתקיימת בפתרון שבו דני, רונן ואלעד יקבלו 100,000 ₪ כל אחד, וליאת תקבל 200,000 ₪.

סימטריה - נאמר שפתרון לבעיית פשיטת רגל מקיים את התכונה סימטריה אם לכל שני נושים בעלי דרישה זהה מוענק בפתרון סכום זהה. תכונה זו מביאה לידי ביטוי עיקרון של שוויון בין נושים: ההחלטה כיצד לחלק את הרכוש צריכה להתקבל ללא משוא פנים וללא העדפה שרירותית של אחד הנושים.

התכונה סימטריה עשויה שלא להתקיים רק אם יש שני נושים בעלי דרישה זהה. אם במצב זה כל זוג נושים בעלי אותה דרישה מקבל סכום זהה בפתרון, הרי הפתרון מקיים את התכונה סימטריה.

נבחן את התכונה סימטריה בשני פתרונות אלה:

א. ליאת מקבלת 250,000 ₪, אלעד 100,000 ₪, רונן 100,000 ₪ ודני 50,000 ₪.

פתרון זה הוא סימטרי מכיוון שאלעד ורונן, הדורשים אותו סכום, מקבלים סכום זהה.

ב. ליאת מקבלת 200,000 ₪, אלעד 150,000 ₪, רונן 100,000 ₪ ודני 50,000 ₪.

פתרון זה אינו סימטרי מכיוון שהדרישות של אלעד ורונן זהות אבל אלעד מקבל יותר מרונן.

מונוטוניות - אם הדרישה של נושה אחד אינה קטנה מהדרישה של נושה שני, אין זה הוגן שהסכום שיקבל הנושה השני יהיה גבוה מהסכום שיקבל הנושה הראשון. נאמר שפתרון לבעיית פשיטת רגל מקיים את התכונה מונוטוניות אם לכל זוג נושים מתקיים תנאי זה:

אם הדרישה של הנושה הראשון גדולה מהדרישה של הנושה השני או שווה לה, הסכום שיקבל הנושה הראשון גדול מהסכום שיקבל הנושה השני או שווה לו.

פתרון שאינו מקיים את עקרון המונוטוניות עשוי לעודד נושים להסתיר חלק מדרישותיהם.

תרגיל 7: (א) האם פתרון המקיים את התכונה מונוטוניות מקיים בהכרח גם את התכונה סימטריה? נמקו את תשובתכם.

(ב) האם פתרון המקיים סימטריה מקיים בהכרח גם מונוטוניות? נמקו את תשובתכם.

נבחן את התכונה מונוטוניות בשני הפתרונות המוצעים לבעיה:

א. ליאת מקבלת 200,000 ₪, אלעד 150,000 ₪, רונן 100,000 ₪ ודני 50,000 ₪. כפי שראינו קודם, פתרון זה אינו סימטרי. הפתרון אינו מונוטוני מאותה סיבה שהוא אינו סימטרי: הדרישה של רונן זהה לדרישה של אלעד, אך הוא מקבל סכום קטן מהסכום שמקבל אלעד.

ב. ליאת מקבלת 100,000 ₪, אלעד 150,000 ₪, רונן 150,000 ₪ ודני 100,000 ₪. פתרון זה הוא סימטרי אך אינו מונוטוני, מכיוון שליאת מקבלת פחות מאלעד על אף שדרישתו של אלעד נמוכה מהדרישה שלה.

תרגיל 8: הציעו פתרון הוגן לבעיה, המקיים את התכונות מונוטוניות, סימטריה ו"נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו". נמקו את בחירתכם.

דוגמה: רוני, יאיר ודליה השתתפו בפרויקט עירוני לשיפור האטרקטיביות של העיר לצעירים. מנהל הפרויקט הבטיח להם החזר הוצאות נסיעה לפי מקום מגוריהם:

- רוני – 20 ₪
- יאיר – 50 ₪
- דליה – 50 ₪

בסיומו של הפרויקט, מנהל הכספים של העיריה שם לב שסכום הכסף שנותר לרשות מנהל הפרויקט הוא 100 ₪, והמליץ שרוני יקבל 30 ₪, יאיר יקבל 35 ₪ ודליה תקבל 35 ₪.

פתרון זה אינו מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו" מכיוון שרוני מקבל יותר מהדרישה שלו.

לעומת זאת, הפתרון מקיים את התכונות סימטריה ומונוטוניות. הכיצד?

- לכל זוג נושים בעלי דרישה זהה (יאיר ודליה), הערך של הפתרון שווה.
- לכל זוג נושים בעלי דרישות שונות (למשל: רוני ויאיר), הנושה בעל הדרישה הגבוהה יותר מקבל סכום גבוה יותר.

תרגיל 9: יאיר סבור שההמלצה של מנהל הכספים אינה הוגנת ועל כן ערער עליה לפני מנהל הפרויקט. מנהל הפרויקט שמע את טענותיו של יאיר והחליט לחלק את 100 השקלים כך:

- רוני – 20 ₪
- יאיר – 70 ₪
- דליה – 10 ₪

(א) אילו תכונות מבין השלוש שצוינו - נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו, סימטריה ומונוטוניות - מתקיימות בפתרון של מנהל הפרויקט ואילו אינן מתקיימות? הסבירו את תשובתכם.

(ב) האם אתם סבורים שהפתרון של מנהל הפרויקט הוגן? מדוע?

2.2 כללי חלוקה

עד כה הצגנו תכונות רצויות של פתרון לבעיית פשיטת רגל מסוימת, כלומר תכונות המתקיימות בחלוקת הרכוש בין הנושים.

כעת אנו מעוניינים לנסח דרכים כלליות למציאת פתרונות שיתאימו לכל בעיה של פשיטת רגל. אפשר לדמות דרך כללית כזו ל"קופסה שחורה", שלתוכה מזינים את הנתונים של בעיית פשיטת הרגל, כלומר את הרכוש ואת דרישות הנושים, והיא מציעה פתרון. דרכים כלליות כאלה נקראות "כללי חלוקה".

אפשר להגדיר כלל חלוקה כך:

כלל חלוקה מתאר דרך שבה יש לחלק את הרכוש בין הנושים על פי דרישותיהם.

דוגמה מהחיים לשימוש בכלל חלוקה היא תהליך הסדרת פשיטת רגל בבית המשפט: השופט שומע את דרישות הנושים, בודק מה שווי הרכוש, ומחליט כיצד יש לחלק את הרכוש בין הנושים.

לעיתים כללי חלוקה שונים מביאים לפתרון זהה ולעיתים לא. במצב נתון יהיו נושים שיעדיפו כלל חלוקה אחד על פני כלל אחר.

כלל חלוקה אפשרי אחד הוא "כלל החלוקה השווה", האומר שהרכוש מחולק שווה בשווה בין הנושים מבלי להתחשב בגובה דרישותיהם. כלל חלוקה אחר הוא "חלוקת הדיקטטור" - נושה אחד מסוים מקבל את כל הרכוש.

נאמר שכלל חלוקה מקיים תכונה מסוימת אם בכל בעיית פשיטת רגל, הפתרון המתקבל משימוש בכלל מקיים את התכונה. למשל, נאמר שכלל חלוקה מקיים את התכונה מונוטוניות אם פתרון המחושב לפי כלל זה הוא מונוטוני בכל בעיית פשיטת רגל שהיא.

תרגיל 10: הסבירו מדוע כלל החלוקה השווה מקיים את התכונה מונוטוניות?

נדגיש את חשיבות המונוטוניות בכלל חלוקה באמצעות דוגמה זו:

ידוע שהשופט משה משתמש בכלל זה: תחילה הוא נותן את מלוא הדרישה לנושה בעל הדרישה הקטנה ביותר, לאחר מכן לבעל הדרישה הבאה בסדר עולה וכך הלאה. אם בשלב מסוים יש שני נושים או יותר בעלי דרישה זהה ונותר די רכוש לחלוקה, הוא נותן לכולם את מלוא דרישתם; אם לא נותר די רכוש למלא את כל הדרישות של נושים אלה, משה מחלק את הרכוש שנותר ביניהם שווה בשווה.

כעת נחזור לבעיה שהוצגה קודם, שבה הרכוש של חברת "הכול בזול" הוא 500,000 ₪ והדרישות של הנושים הן:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪

בבעיה זו יפסוק השופט משה על חלוקה זו:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 0 ₪

מכיוון שפתרון זה אינו מונוטוני, כלל החלוקה שבו משתמש משה אינו מקיים את התכונה מונוטוניות.

אם ליאת תדע מראש מהו כלל החלוקה שבו משתמש השופט משה, היא תנסה להציג דרישה נמוכה יותר מהדרישה האמיתית שלה וכך לשפר את מצבה בפתרון הבעיה.

תרגיל 11: ליאת מוכרת לבעלה יואב מחצית משטר החוב שלה. כמה יקבלו ליאת ובעלה יחד בפתרון הבעיה החדשה לפי הכלל של השופט משה? שימו לב: כעת יש חמישה נושים.

תרגיל 12: מה אפשר להסיק מהדוגמה של ליאת בבעיה האחרונה באשר לחשיבותה של התכונה מונוטוניות בכלל חלוקה?

כפי שנושים יכולים לנסות לפצל את הדרישה שלהם, שני נושים יכולים לאחד את דרישותיהם בתקווה שאיחוד כזה יגדיל את הסכום שיקבלו. נציג נקודה זו בדוגמה.

נחזור לבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול", שהותירה סכום של 500,000 ₪ לחלוקה לפי דרישות אלה:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪

נניח שהשופטת לאה, שדנה בבעיה, נוהגת לפי כלל חלוקה זה:

"יש לחלק חצי מהרכוש לנושה (או לנושים) בעל הדרישה הגבוהה ביותר, ואת החצי השני לחלק שווה בשווה בין הנושים הנותרים".

נשים לב שלפי כלל החלוקה של השופטת לאה, כאשר יש שני נושים הם מתחלקים ברכוש שווה בשווה.

לפי כלל חלוקה זה, ליאת תקבל 250,000 ₪ ודני, רונן ואלעד יקבלו 83,333 ₪ כל אחד. אם רונן ואלעד יאחדו את דרישותיהם ויציגו עצמם כנושה אחד, הדרישה המאוחדת שלהם תהיה 400,000 ₪, דרישה הגבוהה מדרישתה של ליאת. לכן במצב זה יקבלו רונן ואלעד 250,000 ₪, ובסך הכול יגדילו ב-83,333 ₪ את הסכום שיקבלו יחד בפתרון הבעיה.

נציג עתה שתי תכונות נוספות שכללי חלוקה עשויים לקיים.

יציבות לאיחוד נושים – נאמר שכלל חלוקה מקיים את את התכונה "יציבות לאיחוד נושים" אם כאשר נבחן כל זוג נושים, לו היו השניים נושה מאוחד בעל דרישה שגודלה כסכום שתי הדרישות הנפרדות שלהם, הנושה המאוחד היה מקבל את אותו הסכום שקיבלו שני הנושים יחד בבעיה המקורית.

יש הבדל חשוב בין התכונה "יציבות לאיחוד נושים" לבין שלוש התכונות הקודמות שהצגנו. את הסימטריה, למשל, הגדרנו תחילה לבעיה בודדת, ואמרנו כי כלל חלוקה מקיים את התכונה סימטריה אם בכל בעיה מסוימת הוא מתאר פתרון המקיים תכונה זו. באותו אופן הגדרנו מתי פתרון של בעיה מקיים את התכונה מונוטוניות, ואמרנו שכלל חלוקה מקיים את התכונה מונוטוניות אם בכל בעיית פשיטת רגל מסוימת הפתרון המתאים מקיים תכונה זו. את התכונה "יציבות לאיחוד נושים" אי-אפשר לנסח לבעיה מסוימת, אלא רק לכללי חלוקה, וזאת משום שבהגדרתה אנו משווים פתרונות של שתי בעיות – הבעיה לפני איחוד הנושים והבעיה אחרי איחוד הנושים.

התכונה "יציבות לאיחוד נושים" מונעת מצב שבו שיתוף פעולה בין שני נושים יוביל לשינוי בחלוקת הרכוש בין כלל הנושים לבין שני הנושים שהחליטו להתאחד. הראינו קודם שכלל החלוקה האחרון שהוצג אינו מקיים תכונה זו, מכיוון שאיחוד של רונן ואלעד מוביל לכך שהם יקבלו יותר בפתרון הבעיה החדשה.

ניזכר בכלל החלוקה של השופט משה:

תחילה משה נותן את מלוא הדרישה לנושה בעל הדרישה הקטנה ביותר, לאחר מכן לבעל הדרישה הבאה בסדר עולה וכך הלאה. אם בשלב מסוים יש שני נושים או יותר בעלי דרישה זהה, הוא נותן לכולם את מלוא דרישתם אם נותר די רכוש לחלוקה; אם לא נותר די רכוש למלא את כל דרישות הנושים הללו, משה מחלק את הרכוש שנותר ביניהם שווה בשווה.

ראינו שהכלל של השופט משה מעודד פיצול דרישות. כעת נראה שהכלל של משה אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

אם בבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" יתאחדו רונן ואלעד לנושה אחד, תתקבל בעיה חדשה שבה יש לחלק 500,000 ₪ לפי דרישות אלה:

- דני – 100,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪
- רונן ואלעד יחד – 400,000 ₪

לפי כלל החלוקה של משה, בפתרון הבעיה החדשה יקבלו רונן ואלעד יחד 100,000 ₪. לעומת זאת, כפי שראינו, ללא האיחוד ביניהם הפתרון לפי הכלל של השופט משה הוא:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 0 ₪

כלומר, רונן ואלעד אינם מקבלים אותו סכום בשני המקרים, ולכן הכלל אינו יציב לאיחוד נושים.

עקביות – כלל חלוקה מקיים את התכונה עקביות אם בכל פתרון לבעיית פשיטת רגל לפי כלל זה נמצא: לכל שני נושים, אם נסכם את הסכום שקיבלו יחד ונבדוק מה היו מקבלים לו חלקו את אותו סכום בין שניהם בלבד (ללא הנושים הנוספים על דרישותיהם) לפי אותו כלל, נמצא שכל נושה יקבל אותו סכום כמו בפתרון לבעיה המקורית.

כדי להדגים את התכונה עקביות, נחזור לבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול", שיש לה סכום של

500,000 ₪ לחלוקה לפי דרישות אלה:

- דני – 100,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪

נניח שוב שהשופטת לאה דנה בבעיה והיא נוהגת לפי כלל חלוקה זה:

"יש לחלק חצי מהרכוש לנושה (או לנושים) בעל הדרישה הגבוהה ביותר ואת החצי השני לחלק שווה בשווה בין הנושים נותרים".

נבחן את ליאת ואת אלעד: לפי כלל החלוקה של השופטת לאה, ליאת תקבל 250,000 ₪ ואלעד יקבל 83,333 ₪, כלומר יחד הם יקבלו 333,333 ₪.

כעת נבחן את בעיית פשיטת הרגל שבה יש לחלק סכום של 333,333 ₪ לאלעד ולליאת בלבד לפי דרישות אלה:

- אלעד – 200,000 ₪
- ליאת – 300,000 ₪

אם נשתמש בכלל של השופטת לאה לפתרון הבעיה החדשה המצומצמת לליאת ולאלעד, יתקבל פתרון זה: ליאת תקבל 166,666 ₪ (מחצית מהסכום) וכך גם אלעד.

כלומר, לפי כלל החלוקה של השופטת לאה, פתרון הבעיה החדשה - שבה על זוג הנושים ליאת ואלעד לחלוק ביניהם רכוש השווה לצירוף הסכומים ששניהם קיבלו יחד בבעיה המקורית - אינו זהה לפתרון הבעיה המקורית. ליאת ואלעד יקבלו סכומי כסף שונים מאלו שקיבלו בפתרון הבעיה המקורית.

במקרה זה נאמר שהפתרון לפי כלל החלוקה של לאה אינו עקבי בעבור זוג הנושים ליאת ואלעד, ולכן הכלל אינו מקיים את התכונה עקביות. מדוע עקביות חשובה? אחרי הדיון אצל השופטת לאה, ליאת קיבלה 250,000 ₪ ואילו דני, רונן ואלעד הסתפקו כל אחד ב-83,333 ₪. כעת אלעד יכול לבקש דיון נוסף אצל השופטת לאה ולבקש לדון שוב בסכומים שליאת והוא קיבלו. בדיון הנוסף, השופטת לאה תבחן את הסכומים שקיבלו ליאת ואלעד ותגלה שאכן טעתה, ותקבע שכל אחד מהשניים יקבל 166,666 ₪. הדיון לא יסתיים כאן, משום שכעת דני יבקש דיון נוסף, וזה לא יהיה הדיון האחרון בחלוקת הרכוש.

לעיתים יש זוג נושים שאיש מהם אינו מבקש דיון נוסף בחלוקת הסכומים שקיבלו שניהם. אם נבחן מהו הסכום שקיבלו יחד ונבדוק מה היו מקבלים לו חלקו אותו סכום ביניהם לפי כלל החלוקה של לאה, נמצא שכל נושה כזה יקבל אותו סכום כמו בפתרון המקורי. במצב זה נאמר שהפתרון לפי כלל החלוקה של לאה עקבי בעבור זוג הנושים המסוים הזה.

תרגיל 13: מצאו זוג נושים בבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" שבעבורם הפתרון לפי כלל החלוקה של לאה הוא עקבי. הסבירו מדוע בעבור זוג נושים זה הפתרון עקבי.

נבחן את התכונות שלמדנו עד כה באמצעות דוגמה.

במדינת ווסטרוס חוקק הפרלמנט חוק לפתרון בעיות פשיטת רגל. על פי חוק זה, הנושה שהדרישה שלו היא הגבוהה ביותר יקבל את מלוא הרכוש גם אם הרכוש גדול מדרישתו. אם יש נושים אחדים שלכולם דרישה זהה והיא גם הגבוהה ביותר, יחולק ביניהם הרכוש שווה בשווה.

האם כלל החלוקה הנהוג במדינת ווסטרוס הוגן כלפי הנושים? נעריך את רמת ההוגנות של הכלל באמצעות בדיקה אם הוא מקיים את התכונות שהגדרנו קודם.

תרגיל 14: בדיקה של התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

(א) נציג שוב את בעיית הפרויקט העירוני שבה הדרישות לחלוקת הרכוש בשווי 100 ₪ הן:

- רוני – 20 ₪
- יאיר – 50 ₪
- דליה – 50 ₪

האם הפתרון לבעיה לפי החוק במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"? נמקו את תשובתכם.

(ב) נתבונן בבעיית הפרויקט העירוני שבה הרכוש הוא 100 ₪ והדרישות של הנושים הן:

- רוני – 30 ₪
- יאיר – 40 ₪
- דליה – 40 ₪

האם הפתרון המתקבל לפי כלל החלוקה במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"?

ראינו שהתכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו" מתקיימת במקרים מסוימים אך לא בכולם. לכן כלל החלוקה של מדינת ווסטרוס אינו מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

תרגיל 15: האם החוק במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה סימטריה? נמקו את תשובתכם.

נראה שהתכונה מונוטוניות מתקיימת בחוק במדינת ווסטרוס. נבחן שני נושים כלשהם - אביאל וברק. כדי להראות שהחוק מקיים את התכונה מונוטוניות יש להראות שאם הדרישה של אביאל גבוהה לפחות כמו הדרישה של ברק, הסכום שיקבל אביאל גבוה לפחות כמו הסכום שיקבל ברק.

ייתכנו שני מצבים: האחד, הדרישה של אביאל גבוהה מהדרישה של ברק, השני, הדרישות של שניהם שוות. נראה שלפי החוק, בשני המקרים הסכום שיקבל אביאל אינו נמוך מהסכום שיקבל ברק.

אם הדרישה של אביאל גבוהה מהדרישה של ברק, הרי ברק לא יקבל דבר, ולכן נכון שהסכום שיקבל אביאל גבוה לפחות כמו הסכום שיקבל ברק.

אם הדרישות של השניים שוות - שניהם יקבלו אותו סכום: אם החוב שחייבים להם אינו החוב הגבוה ביותר, שניהם לא יקבלו דבר; אם החוב שחייבים לשניהם הוא הגבוה ביותר, הם יחלקו ביניהם את הרכוש שווה בשווה, אולי עם נושים נוספים שגם להם חייבים אותו חוב גבוה ביותר.

תרגיל 16: בדיקה של התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

נציג שוב את בעיית הפרויקט העירוני שבה הדרישות לחלוקת הרכוש בשווי 100 ₪ הן:

- רוני – 20 ₪
- יאיר – 50 ₪
- דליה – 50 ₪

הראו באמצעות בעיה זו שכלל החלוקה של מדינת ווסטרוס אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

תרגיל 17: הציעו בעיית פשיטת רגל נוספת שבה החוק החדש בווסטרוס אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים", והסבירו מדוע התכונה אינה מתקיימת.

נראה עתה שהשיטה המוצעת בחוק עקבית. לשם כך עלינו להראות שבעבור כל זוג נושים שנבחר הפתרון עקבי. כלומר, עלינו להראות שלפי החוק, אם יחלקו ביניהם את הסכום שקיבלו שניהם בבעיה מרובת המשתתפים, החלק שכל אחד מהם יקבל לא ישתנה.

נבחן שוב את אביאל ואת ברק, ונזכור שהדרישה של אביאל אינה קטנה מזו של ברק.

נניח, למשל, שהדרישה של אביאל היא 100 ₪ ושל ברק 50 ₪. אם הדרישה של אביאל היא הגבוהה ביותר, כי אז בבעיה המקורית אביאל יקבל את חלקו מחלוקת הסכום בין כל הנושים שהיו בעלי הדרישה הגבוהה ביותר, וברק לא יקבל דבר. כאשר נבחן את הבעיה של חלוקת הסכום שקיבל אביאל בינו לבין ברק, נקבל לפי הכלל של מדינת ווסטרוס שגם כעת ברק לא יקבל דבר ואביאל יקבל את מלוא הסכום.

ומה יקרה אם בבעיה המקורית הדרישה של אביאל אינה הגבוהה ביותר? על כך תענו בתרגיל 18.

תרגיל 18: הסבירו מדוע גם אם הדרישה של אביאל אינה הגבוהה ביותר, הפתרון עקבי לאביאל ולברק.

אם בבעיה המקורית הדרישות של אביאל ושל ברק עומדות על 100 ₪ והן הדרישות הגבוהות ביותר, שניהם יקבלו חלק יחסי מחלוקת הסכום לנושים בעלי הדרישה הגבוהה. כלומר, שניהם יקבלו אותו סכום. בבעיה שכוללת רק את שניהם, הדרישות של אביאל ושל ברק זהות ולכן החוק בווסטרוס יקבע שיש לחלק את הסכום הכולל שקיבלו ביניהם שווה בשווה. ולכן כל אחד יקבל אותו סכום שקיבל בבעיה המקורית.

ההסבר שהבאנו נכון לכל זוג נושים, ולכל מצב אפשרי של הדרישות שלהם. בכך הראינו שכלל החלוקה של מדינת ווסטרוס מקיים את התכונה עקביות.

בהמשך יוצג הסבר נוח יותר לקיומה של עקביות בכלל של מדינת ווסטרוס.

תרגיל 19: המציאו כלל לפתרון בעיית פשיטת רגל, ובדקו אם הוא מקיים את התכונות עקביות ו"יציבות לאיחוד נושים".

3. כללי חלוקה בסיסיים ותיאור ציורי לכללי חלוקה

ראינו שיש כללי חלוקה רבים. כל כלל מקיים תכונות מסוימות ואינו מקיים תכונות אחרות. בפרק זה נציג כללי חלוקה אחדים, נבדוק אילו תכונות הם מקיימים ונדגים שיטה ציורית לממש את כללי החלוקה, שנקראת "שיטת המְכָלִים".

נעשה זאת באמצעות סיפורה הדמיוני של השופטת דבורה, שמונתה בידי המדינה להכריע בבעיות פשיטת רגל.

דבורה למדה את משמעותן של התכונות שלמדנו עד כה וחיפשה כללים הוגנים שיקיימו את התכונות הללו. בתחילת דרכה נהגה דבורה להכריע לפי כלל החלוקה השווה, האומר שיש לחלק את הרכוש שווה בשווה בין כל הנושים מתוך התעלמות מדרישותיהם.

תרגיל 20:

(א) כיצד תכריע השופטת דבורה בבעיה שהצגנו קודם, שבה עליה לחלק סכום של 30,000 ₪ בין אילן ליוסי, שהשקיעו מכספם במסעדה של יואל? יוסי דורש 40,000 ₪, ואילו אילן דורש 20,000 ₪.

(ב) מי יהיה פחות מרוצה מחלוקה לפי כלל החלוקה השווה ומדוע?

(ג) מה ההפרש בין דרישתו של כל אחד מהנושים לבין הסכום שקיבל בפתרון זה?

(ד) האם אתם סבורים שכלל החלוקה של דבורה הוגן? מדוע?

(ה) הכלל של דבורה אינו מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו". תנו דוגמה לבעיית פשיטת רגל שיש בה שני נושים והפתרון שלה לפי הכלל של דבורה אינו מקיים תכונה זו. נמקו את תשובתכם.

(ו) התכונה סימטריה מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה. הסבירו מדוע.

(ז) האם התכונה מונוטוניות מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה? הסבירו מדוע.

(ח) גם התכונה עקביות מתקיימת. הסבירו מדוע.

(ט) התכונה "יציבות לאיחוד נושים" אינה מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה. הסבירו מדוע.

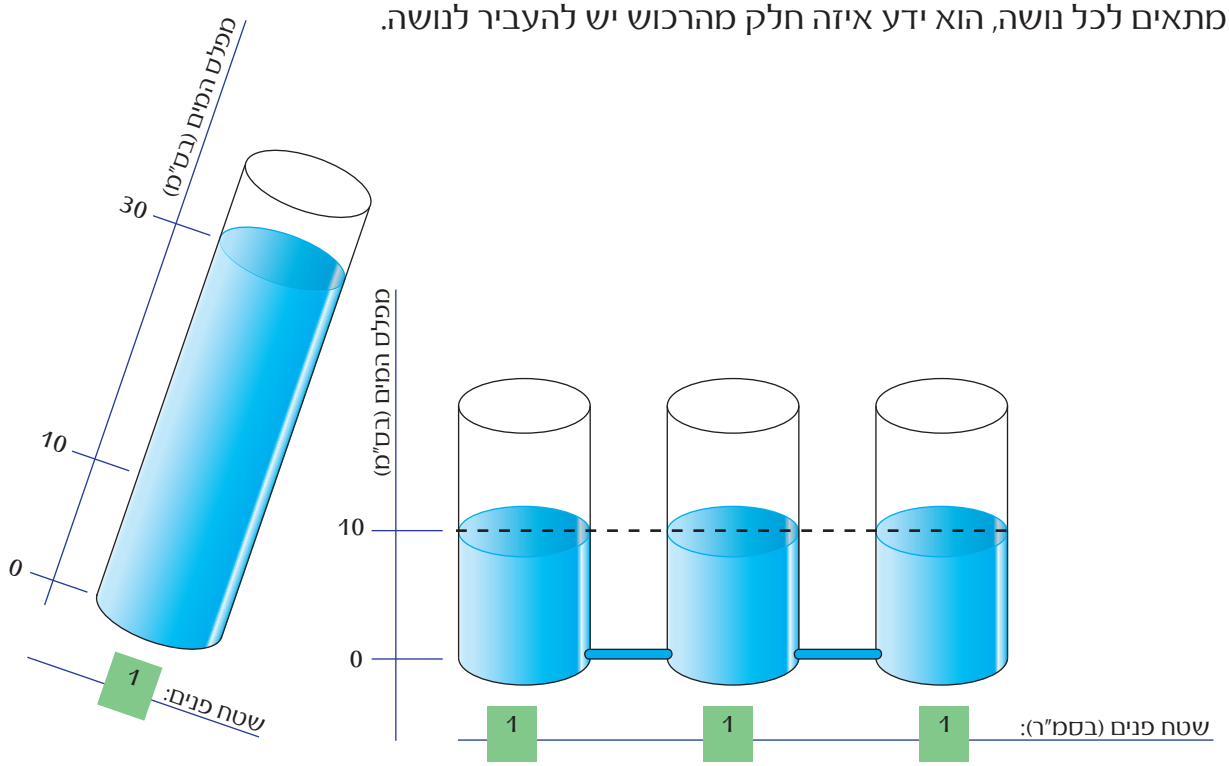
לאחר שפסקה את החלטותיה לפי כלל החלוקה השווה במשך זמן מה, התלוננו בפני השופטת דבורה שהכלל שלה אינו הוגן. אחד המתלוננים הבולטים היה נתן, שנהג להעביר את זמנו בצפייה בדיונים המתנהלים באולמה של השופטת. נתן העיר לשופטת שאין זה הוגן שנושים מסוימים מקבלים יותר מדרישתם בעוד אחרים מקבלים פחות מדרישתם.

דבורה רצתה להתפנות לחשוב על שיטה חדשה, ולשם כך הייתה זקוקה לזמן. איך תמצא זמן אם ימים שלמים עליה לעסוק בהכרעות ובחישובים בעניינים בוערים שבין נושים? דבורה ביקשה מעוזרה הנאמן, ברק, שיחליף אותה על כס השיפוט ויערוך את החישובים הנוגעים לסכומים שיש להעביר לכל נושה לפי כלל החלוקה השווה.

ברק היה בחור מוכשר, אך טרם למד איך מחלקים מספרים, ולכן לא היה מסוגל לקבוע מהו הסכום שיקבל כל נושה. דבורה חיפשה דרך פשוטה שתעזור לברק לחלק מספר במספר שלם, והגתה לשם כך את שיטת המְכָלִים.

דבורה נטלה מכלים ששטח הפנים שלהם זהה - 1 סמ"ר, וחיברה ביניהם באמצעות צינורות דקים בתחתיתם (ראו איור 1). כל מכל במערכת מייצג נושה, ולכן מספר המכלים במערכת שווה למספר הנושים בבעיה. כדי לדעת מהו הסכום שיש להעביר לכל נושה, מוזגים מים בנפח המייצג את ערך הרכוש שיש לחלק בין הנושים, וכל נושה יקבל את הסכום השווה לכמות המים במכל שלו.

לפי חוק כלים שלובים, לאחר שברק ימזוג מים במכלים, גובה המים בכל המכלים יהיה זהה. נזכור שנפח המים במכל שווה לגובה מפלס המים במכל כפול שטח הפנים שלו. מכיוון ששטח הפנים של כל המכלים זהה, הרי גם כמות המים בכל המכלים תהיה זהה. מכאן, אם ברק ימדוד את נפח המים במכל המתאים לכל נושה, הוא ידע איזה חלק מהרכוש יש להעביר לנושה.



איור 1: מערכת המכלים של דבורה לחלוקה שוויונית.

אלה היו ההנחיות של דבורה לברק:

- חבר למערכת מכלים שמספרם שווה למספר הנושים. המכלים יחוברו בתחתיתם בצינור דק.
- לפי הנתונים בבעיה, הגדר מהו הערך של יחידת נפח אחת של מים.

  למשל, בבעיית המסעדה של יואל, שבה ערך הרכוש לחלוקה הוא 40,000 ₪, נגדיר שסמ"ק אחד של מים שווה 1,000 ₪.
- מלא מים בדלי הגדול בכמות שתתאים לשווי הרכוש שיש לחלק.
- מזוג את המים מהדלי לאחד המכלים הקטנים במערכת.
- מדוד את גובה מפלס המים (בס"מ) במכלים הקטנים. זהו גם נפח המים בכל מכל.
- כל נושה יקבל סכום המתאים לנפח המים במכל שלו.

תרגיל 21: ציירו מערכת המתארת את החלוקה השוויונית בבעיית המסעדה, שבה הנושים הם יוסי ואילן. ציינו מהו מפלס המים בדלי הגדול (לפני שברק מזג ממנו את המים למכלים) ובכל אחד מהמכלים (אחרי שברק מזג לתוכם את המים). אל תשכחו לצייר את הצינורות הדקים בתחתית.

השופטת דבורה התפנתה למחשבה על כלל חלוקה חדש לבעיות פשיטת רגל. היא חיפשה כלל שיקיים את מרבית התכונות של כלל החלוקה השווה, אבל לא יוביל לפתרון שבו נושה מקבל יותר מהדרישה שלו. כך תענה דבורה לתלונתו של נתן.

דבורה המציאה כלל חדש וקראה לו כלל החלוקה השווה על תנאי. לפי כלל זה, מחלקים את הרכוש שווה בשווה בין הנושים כל עוד אין נושה שמקבל את כל דרישתו. חלוקת הרכוש תיערך בשלבים:

- תחילה יחולק הרכוש באופן שוויוני עד שכל הנושים יקבלו סכום השווה לדרישה הנמוכה ביותר.
- בהמשך החלוקה לא ייכללו הנושים המחזיקים בדרישה הנמוכה ביותר, שכאמור קיבלו את מלוא דרישתם בשלב הקודם. הרכוש הנותר יחולק בין כל הנושים האחרים, עד שנושים אלה יקבלו סכום השווה לדרישה הבאה בגודלה.

וכך הלאה.

דוגמה: נחשב את הפתרון לבעיית העוגה לפי כלל החלוקה השווה על תנאי. כזכור, בבעיה זו גודל הרכוש הוא 500 גרם, הדרישה של מיטל היא 300 גרם, של יוני 200 גרם ושל יסמין 100 גרם.

- תחילה נחלק את גובה הדרישה הנמוכה ביותר, 100 גרם, לכל אחד מהילדים. כך חילקנו בסך הכול 300 גרם.
- את 200 הגרמים הנותרים נחלק שווה בשווה בין מיטל ליוני.

הפתרון שהתקבל מחלוקה זו: ליסמין 100 גרם, למיטל וליוני 200 גרם לכל אחד.

תרגיל 22: אילו מן התכונות - "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו", סימטריה, מונוטוניות, עקביות ו"יציבות לאיחוד נושים" - מתקיימות בכלל החלוקה השווה על תנאי? נמקו את תשובתכם.

רמז: היעזרו בניתוח התכונות שערכנו לכלל החלוקה השווה עם ההתאמות הנדרשות.

נחזור לדבורה ולברק. השופטת דבורה הייתה מרוצה מכלל החלוקה השווה על תנאי, אך גם כעת היו תלונות של נושים שפסקה בעניינם. נתן טען שלעיתים כאשר הסכום לחלוקה קטן מאוד, אנשים שהלוו סכומים גדולים מקבלים סכום שווה לסכום שמקבלים אנשים שהלוו סכומים קטנים. בעבור אנשים אלה, ההפסד בתהליך גדול יותר. לטענתו, יש להתחשב גם בגודל הדרישה במקרים אלה.

דבורה ביקשה לחשוב על גישה חדשה לפתרון בעיות פשיטת רגל, ושוב הייתה צריכה לפַנות מזמנה, שהיה עמוס בדיונים משפטיים. כדי שתוכל להשאיר את הטיפול בבעיות פשיטת הרגל לעוזרה ברק, היה עליה להתאים את מערכת המכלים לכלל החלוקה השווה על תנאי.

כפי שהזכרנו קודם, ברק היה בחור מוכשר וידע להכין מכלים מסוגים שונים - מכלים בקוטר שונה, בגובה שונה, ומכלים סגורים בחלקם העליון שגובה מפלס המים בהם מוגבל.

תרגיל 23: עִזרו לדבורה להתאים את שיטת המכלים כדי שיהיה אפשר להשתמש במערכת מכלים לפתור בעיות פשיטת רגל לפי כלל החלוקה השווה על תנאי. אל תשכחו לציין מה יהיה מיקום הצינורות הדקים המחברים בין המכלים ולצייר אותם.

(א) אילו הנחיות תתנו לברק?

(ב) ציירו מערכת מכלים המתארת את החלוקה לפי כלל החלוקה השווה על תנאי באופן כללי.

תרגיל 24:

(א) ציירו מערכת מכלים המתארת את הפתרון לבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" (המוצגת בעמוד 9) לפי כלל החלוקה השווה על תנאי.

(ב) פתרו את בעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" לפי כלל החלוקה השווה על תנאי.

תרגיל 25: המציאו בעיית פשיטת רגל עם שלושה נושים שבה כלל החלוקה השווה וכלל החלוקה השווה על תנאי מובילים לפתרון זהה.

משהתפנתה השופטת דבורה למחשבה על גישה חדשה להכרעה בבעיות פשיטת רגל, היא המציאה את כלל החלוקה היחסי, האומר:

הרכוש יחולק בין הנושים יחסית לגובה דרישותיהם. כלומר אם הדרישה של נושה מסוים היא חצי מסך הדרישות, הנושה יקבל חצי מהרכוש.

הנה הביטוי המתמטי לסכום שמקבל נושה X בפתרון הבעיה:

$$\text{הסכום שמקבל נושה } x = \frac{\text{הדרישה של נושה } x}{\text{סכום כל הדרישות}} \cdot \text{הרכוש}$$

כזכור, בבעיית המסעדה של יואל, הרכוש הוא 30,000 ₪, הדרישה של יוסי היא 40,000 ₪ ושל אילן 20,000 ₪. סכום הדרישות הוא 60,000 ₪, כלומר הרכוש שווה למחצית מסך הדרישות. לכן כל אחד משני הנושים יקבל מחצית מהדרישה שלו: יוסי יקבל 20,000 ₪ ואילן יקבל 10,000 ₪.

תרגיל 26: רשמו נימוק אחד המסביר מדוע חלוקה לפי הכלל היחסי הוגנת יותר מחלוקה לפי כלל החלוקה השווה.

תרגיל 27: רשמו נימוק אחד המסביר מדוע חלוקה לפי כלל החלוקה השווה הוגנת יותר מחלוקה לפי הכלל היחסי.

תרגיל 28: לכל אחת מהתכונות שלהלן, רשמו אם כלל החלוקה היחסי מקיים אותה. נמקו את תשובתכם.

(א) התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו" מתקיימת. הסבירו מדוע.

(ב) סימטריה

(ג) מונוטוניות

(ד) התכונה עקביות מתקיימת. הסבירו מדוע.

רמז: היחס בין הדרישה של נושה לסכום הדרישות אינו משתנה כאשר מצמצמים את הבעיה לשני נושים.

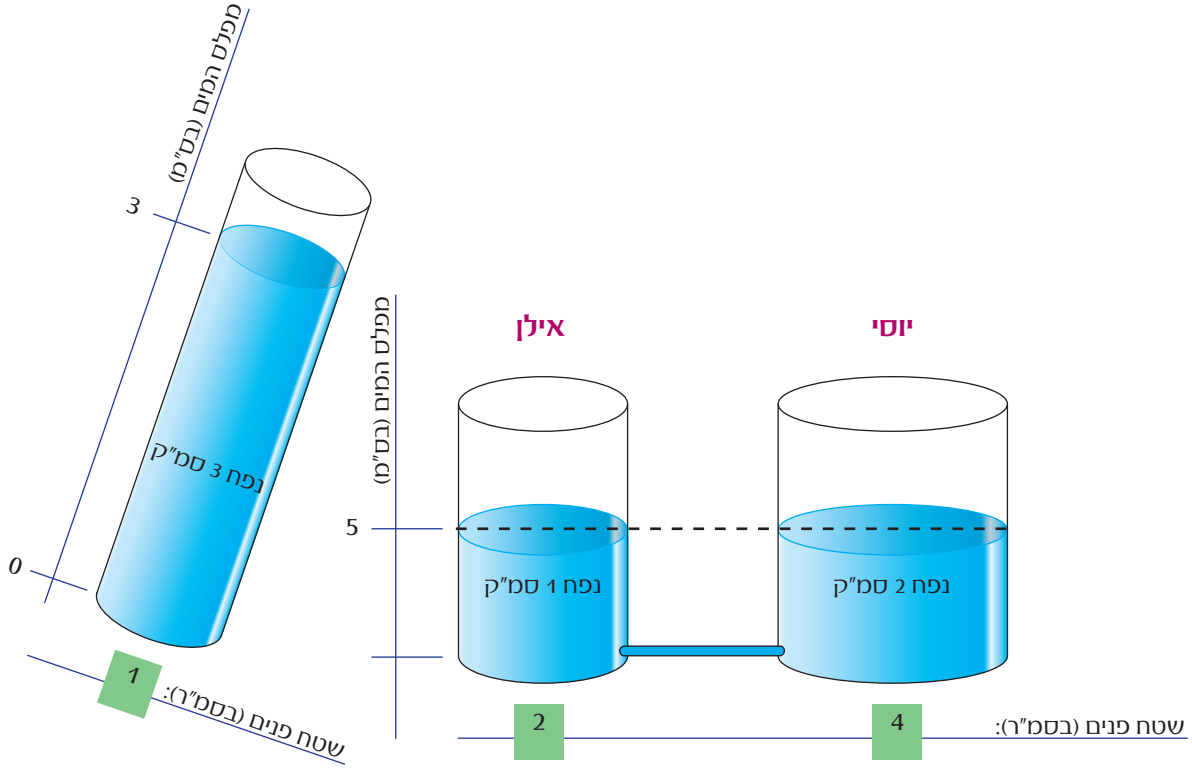
(ה) התכונה "יציבות לאיחוד נושים" מתקיימת. הסבירו מדוע.

חלפו השנים, ברק למד את לוח הכפל ודבורה התקרבה לגיל שבו יהיה עליה לפרוש מתפקידה. דבורה רצתה שמחליפה בתפקיד יוכל ליהנות מעזרתו של ברק בפתרון בעיות לפי הגישה היחסית. לשם כך היה עליה להתאים את מערכת המכלים לגישה היחסית ולהשאיר הוראות ברורות לברק כיצד יש לפעול כדי להגיע לפתרון נכון של הבעיה. נזכיר שוב כי נפח המים במכל מסוים שווה לשטח הפנים של המכל כפול גובה מפלס המים במיכל.

דבורה כתבה לברק הנחיות אלה:

- לכל נושה בנה מכל בעל שטח פנים המתאים לדרישה שלו. למשל, אם הדרישה של נושה היא 20,000 ₪, בנה לו מכל בעל שטח פנים של 20 סמ"ר.
- בנה מערכת ממכלים המתאימים לנושים וחבר ביניהם בתחתיתם באמצעות צינורות דקים.
- מלא מים בדלי בנפח שיתאים לשווי הרכוש שיש לחלק. למשל, אם הרכוש הוא 600,000 ₪, מלא בדלי 600 סמ"ק. אם שטח הפנים של הדלי הגדול הוא 60 סמ"ר, גובה מפלס מים של 10 ס"מ יבטיח נפח מים כנדרש.
- מזוג את המים מהדלי לאחד המכלים במערכת.
- מדוד את נפח המים בסמ"ק בכל אחד מהמכלים.
- כל נושה יקבל סכום המתאים לנפח המים במכל שלו.

נתאר עכשיו את בעיית המסעדה של יואל בעזרת מערכת מכלים. כל יחידת נפח מים תייצג 10,000 ₪. מכיוון שהדרישות של יוסי ושל אילן הן 40,000 ₪ ו-20,000 ₪ בהתאמה, המכל של יוסי יהיה בעל שטח פנים של 4 סמ"ר ואילו המכל של אילן יהיה בעל שטח פנים של 2 סמ"ר. המערכת תיראה כך:



איור 2: מערכת מכלים המתאימה לפתרון הבעיה של יוסי ויואל לפי הכלל היחסי כאשר כל סמ"ק של מים שווה לסכום של 10,000 ₪.

תרגיל 29:

(א) ציירו ציור מכלים המתאים לבעיית חלוקת העוגה של המורה (ראו עמוד 5) לפי הכלל היחסי. אל תשכחו לצייר את הצינורות הדקים.

(ב) פתרו את בעיית חלוקת העוגה של המורה לפי הכלל היחסי.

באמצעות סיפורה של השופטת דבורה למדנו כיצד לבנות מערכת מכלים שתממש כלל חלוקה מסוים. כמו כן, הכרנו שלושה כללי חלוקה:

- כלל החלוקה השווה
- כלל החלוקה השווה על תנאי
- הכלל היחסי

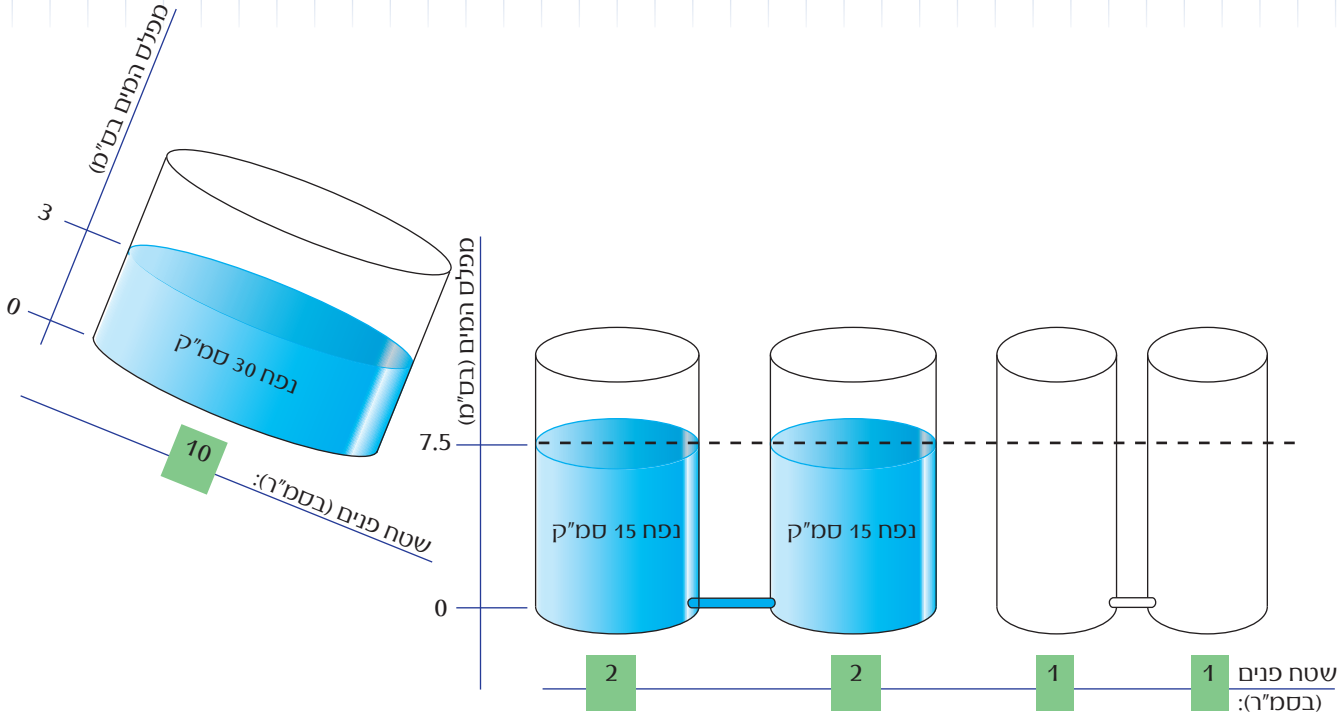
לעיתים כללי חלוקה שונים יובילו לחלוקה זהה של הרכוש בבעיה נתונה. למשל, במקרה שבו כל הדרישות זהות, כלל החלוקה השווה, כלל החלוקה השווה על תנאי והכלל היחסי יובילו לפתרון זהה.

כעת נראה בעזרת שיטת המכלים - כיצד לבדוק אם התכונה עקביות מתקיימת בכלל מסוים.

אם נבנה מערכת מכלים ונגדיר הנחיות למילוי המכלים באופן שיתאים לכלל מסוים, נוכל לבחון מה יקרה כאשר "ננתק" שני מכלים מהמערכת ונמלא אותם מחדש בנוזל שהיה מצוי בהם טרם הניתוק. אם מפלס המים בשני המכלים לא ישתנה, הרי הכלל מקיים את התכונה עקביות.

כזכור, כלל החלוקה הנהוג בווסטרוס מחלק את הרכוש שווה בשווה בין הנושים בעלי הדרישה הגבוהה ביותר. נתאר מערכת מכלים המיישמת את הכלל. לשם כך נקצה לכל נושה מְכָל ששטח פניו מתאים לגובה הדרישה של אותו נושה, ונחבר בצינורות דקים מכלים בעלי שטח פנים זהה. לאחר מכן, נמלא את הדלי בכמות מים המתאימה לגובה הרכוש ונמזוג את המים מהדלי לאחד מהמכלים בעלי שטח הפנים הגדול ביותר. נפח המים שיימצא בכל מכל בסוף התהליך מייצג את סכומי הכסף שעל הנושים לקבל.

דוגמה: הרכוש לחלוקה הוא 30, וארבעת הנושים מחזיקים בדרישות: 10, 10, 20 ו-20. המערכת באיור 3 מתאימה לבעיה. שימו לב שחיברנו בצינורות דקים רק מכלים בעלי אותו שטח פנים, ולא את כל המכלים כפי שעשינו במקרים הקודמים.



איור 3: מערכת המכלים לכלל החלוקה בווסטרוס.

כדי להראות שהעקביות מתקיימת, נבחר שני נושים כלשהם וננתק את המכלים שלהם מהמערכת. אם שני המכלים היו מחוברים זה לזה, נשאיר את החיבור ביניהם. כעת, נעביר את הנוזל הנמצא בשני המכלים לדלי, ונבחן בעיה שבה הרכוש לחלוקה שווה לנפח המים בדלי, ושני הנושים היחידים הם אלה שבחרנו. כלומר, עלינו למזוג את המים מהדלי למכל ששטח פניו גדול יותר. קל להשתכנע שנקבל חלוקה זהה לחלוקה שהתקבלה בפתרון הבעיה המקורית. כך הראינו שכלל החלוקה בווסטרוס עקבי תוך כדי שימוש במערכת מכלים הממשת את הכלל.

4. כללי חלוקה מתקדמים

בפרק זה נציג כלל חלוקה נוסף המתבסס על הנזקים שנגרמים לנושים. הנזק לנושה הוא ההפרש בין הדרישה של הנושה לבין הסכום שהוא מקבל לפי הפתרון.

למשל - בעיית המסעדה שבה יש לחלק 30,000 ₪ בין אילן ליוסי, הדרישה של יוסי היא 40,000 ₪ והדרישה של אילן היא 20,000 ₪. הפתרון לפי הכלל היחסי הוא:

- יוסי יקבל 20,000 ₪, והנזק שייגרם לו יהיה 40,000 - 20,000 = 20,000.
- אילן יקבל 10,000 ₪, והנזק שייגרם לו יהיה 20,000 - 10,000 = 10,000.

כלומר, הנזק של יוסי גדול מהנזק של אילן.

תרגיל 30: האם לדעתכם הוגן שהנזק לאחד הנושים יהיה גדול מהנזק לנושה אחר? נמקו את תשובתכם.

נגדיר שני כללי חלוקה המסתמכים על הנזק של הנושים: כלל מזעור הנזקים וכלל "שניים אוחזין בטלית".

4.1 כלל מזעור נזקים

כלל מזעור נזקים אומר שיש למזער את הנזק לנושים. לכן, עלינו לפצות תחילה את הנושים בעלי הדרישה הגדולה ביותר. חלוקת הרכוש תבוצע בשלבים, בדרך זאת:

- תחילה נחלק לנושה בעל הדרישה הגדולה ביותר סכום שישווה את הנזק שלו לדרישה השנייה בגודלה.
- נמשיך בחלוקת הרכוש באופן שווה בין שני הנושים שדרישותיהם הן הגבוהות ביותר עד שהנזק שלהם ישתווה לדרישה השלישית בגודלה, וכך הלאה.
- הנושה בעל הדרישה הנמוכה ביותר יקבל חלק מהרכוש רק לאחר שכל הנושים האחרים קיבלו סכום שהקטין את הנזק שייגרם להם לגודל הדרישה שלו.
- מאותו רגע חלוקה שאר הרכוש נערכת באופן שוויוני בין כל הנושים.

דוגמה: בבעיית המסעדה של יואל, ההפרש בין הדרישות של יוסי (40,000 ₪) ואילן (20,000 ₪) הוא 20,000 ₪, לכן נחלק תחילה 20,000 ₪ ליוסי.

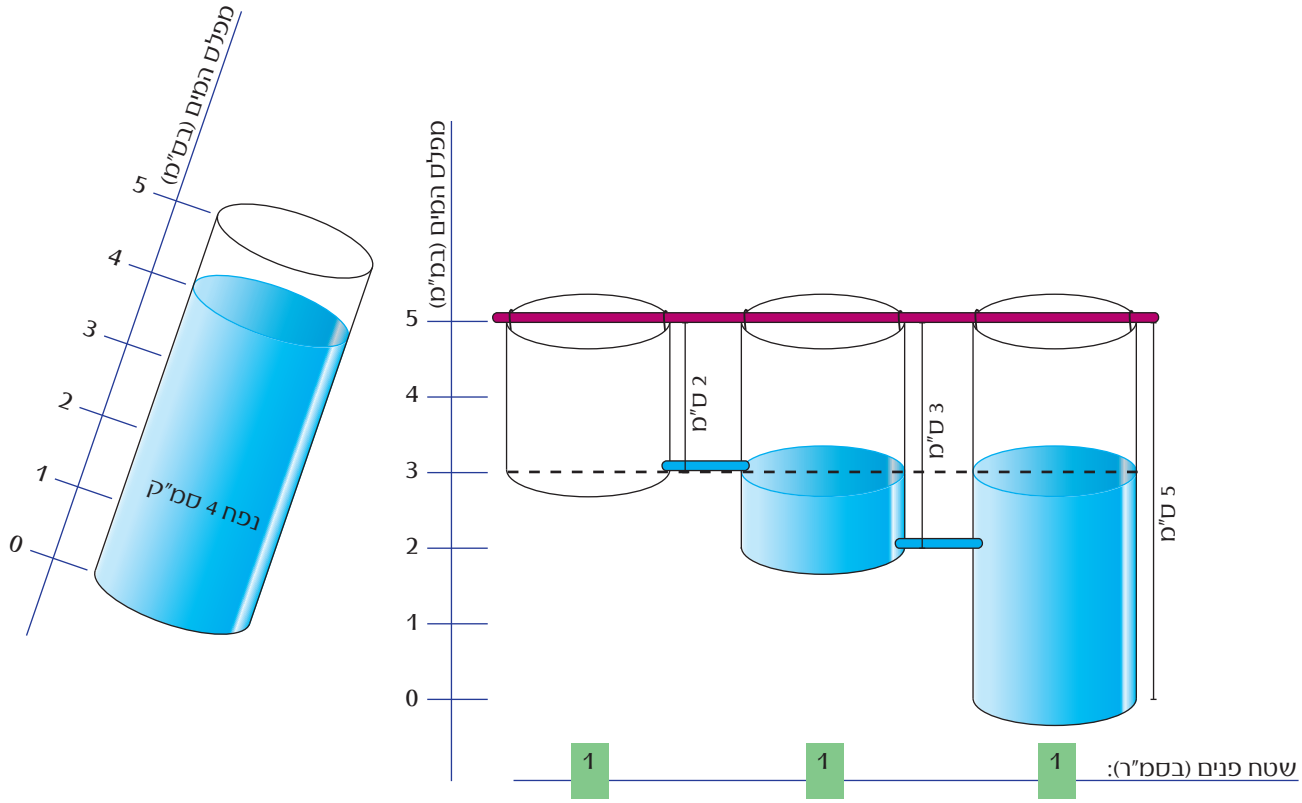
אחרי שיוסי קיבל 20,000 ₪, הנזק שנגרם ליוסי הוא 20,000 ₪; מקור הנזק בהפרש בין הדרישה שלו - 40,000 ₪ - לסכום שקיבל עד כה - 20,000 ₪. הנזק שנגרם לאילן גם הוא 20,000 ₪, ומקורו בהפרש בין הדרישה שלו - 20,000 ₪ - לסכום שקיבל עד כה - 0 ₪. מכיוון שבשלב זה הנזק של שני הנושים שווה, את החלק הנותר מהרכוש (10,000 ₪) נחלק שווה בשווה בין שניהם וכל אחד מהם יקבל 5,000 ₪.

בסופו של דבר יוסי יקבל 25,000 ₪, ואילן יקבל 5,000 ₪.

תרגיל 31: מה הנזק הסופי לכל נושה בפתרון זה?

גם את כלל מזעור הנזקים אפשר לממש באמצעות מערכת מכלים. במערכת זו, שטח הפנים של כל המכלים הוא 1 סמ"ר, וגובהו של כל מכל מתאים לדרישה של הנושה שהוא מייצג. בניגוד למערכות המכלים שראינו עד כה, שבהן המכלים הונחו על הרצפה, הפעם המכלים תלויים מהתקרה.

בעבור שלושה נושים המחזיקים בדרישות 2, 3, 5 ושווי רכוש של 4, המערכת תיראה כך:



איור 4: מערכת המכלים המתאימה לגישת מיזעור הנזקים.

מערכת הצינורות מבטיחה שהמים יזרמו תחילה למכל הנמוך ביותר, כלומר למכל שמייצג את הנושה בעל הדרישה הגבוהה ביותר (המכל הימני באיור 4). נשים לב שכל מכל מתחיל להתמלא בנוזל כשהמפלס הכללי מגיע לגובה התחתית שלו.

לאחר סיום המזיגה, נמדוד את נפח המים בכל מכל ובהתאם לכך ייקבע הסכום שיקבל הנושה שמייצג המכל.

באיור 4, הנוזל שנפחו 4 סמ"ק מתחלק כך:

- 3 סמ"ק לנושה בעל הדרישה 5;
- 1 סמ"ק לנושה בעל הדרישה 3;
- 0 סמ"ק לנושה בעל הדרישה 2.

מכאן, הנזק של כל הנושים בפתרון שווה, וערכו הוא 2.

תרגיל 32: פתרו את בעיית חלוקת העוגה של המורה באמצעות גישת מזעור הנזקים. אפשר להשתמש במערכת מכלים הדומה למערכת המתוארת באיור 4.

תרגיל 33: רשמו אילו מהתכונות מתקיימות בגישת מזעור הנזקים. נמקו את תשובתכם.

(א) "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"

(ב) סימטריה

(ג) מונוטוניות

(ד) הכלל מקיים את התכונה עקביות. הסבירו מדוע.

רמז: היעזרו במימוש הכלל באמצעות מערכת מכלים. מה יקרה אם ננתק מהמערכת את כל המכלים למעט שניים, נעביר את המים משני המכלים לדלי ונמזוג מחדש את המים מהדלי למערכת המוקטנת?

(ה) "יציבות לאיחוד נושים" - תכונה זו מתקיימת רק בחלק מהמקרים. מצאו דוגמה שבה תכונה זו אינה מתקיימת.

4.2. כלל החלוקה "שניים אוחזין בטלית"

בפרק הראשון פגשנו את כלל "שניים אוחזין בטלית", שהוזכר במשנה. בכלל זה נאמר: אם שני הנושים דורשים את מלוא הרכוש, הרכוש מתחלק ביניהם שווה בשווה; אם אחד מהם דורש את מלוא הרכוש והשני דורש מחצית מהרכוש, הראשון מקבל שלושה רבעים מהרכוש והשני מקבל רבע.

ומה קורה במקרים שבהם הדרישות של שני הנושים אינן כל הרכוש ומחצית הרכוש? אפשר להכליל את הכלל כך:

כלל שניים אוחזין בטלית: כל נושה מקבל את חלק הרכוש שלא נדרש על ידי הנושה האחר. החלק שנותר, שאותו שני הנושים דורשים, מחולק בין שני הנושים שווה בשווה.

דוגמה: יצחק, אביהם של עשיו ויעקב, הבטיח בצוואתו 40 זוזים לעשיו ו-30 זוזים ליעקב. כשפתחו את תיבת האוצר של יצחק לאחר פטירתו, מצאו בתוכה 60 זוזים בלבד. כיצד יחלקו את רכושו של יצחק בין שני הבנים? ראש הכפר החליט להשתמש בכלל "שניים אוחזין בטלית": מכיוון שלעשיו הובטחו 40 זוזים מתוך ה-60, הרי 20 זוזים לא הובטחו לו, ולכן הוא נתן ליעקב 20 זוזים. מכיוון שליעקב הובטחו 30 זוזים מתוך ה-60, הרי 30 זוזים לא הובטחו לו, ולכן הוא נתן לעשיו 30 זוזים. את עשרת הזוזים הנותרים, שאותם דרשו שני האחים, חילק שווה בשווה ביניהם. בסך הכול קיבל יעקב 25 זוזים ועשיו 35 זוזים. המקרה המוצג בדוגמה זו, כולל הפתרון וההסבר, מופיעים בתלמוד הבבלי במסכת יבמות, דף לח, עמוד א.

תרגיל 34:

א) פתרו את בעיית המסעדה של יואל לפי כלל "שניים אוחזין בטלית". להזכירכם, שווי הרכוש הוא 30,000 ₪, הדרישה של יוסי היא 40,000 ₪ והדרישה של אילן היא 20,000 ₪.

ב) כלל "שניים אוחזין בטלית" והכלל היחסי מביאים לפתרונות זהים בבעיית המסעדה של יואל (ראו עמוד 28). האם בכל בעיה של שני נושים נקבל פתרונות זהים בשני כללים אלה? אם כן, נמקו. אם לא, מצאו דוגמה שבה שני הכללים אינם מוליכים לפתרונות זהים.

תרגיל 35: בבעיית דמי הכיס של רם ושל יותם יש לחלק רכוש של 100 ₪ בין רם, שדרישתו 80 ₪, לבין יותם, שדרישתו 50 ₪. פתרו את הבעיה לפי כללי החלוקה שבטבלה והשוו בין הפתרונות באמצעות הטבלה.

כלל חלוקה	רם	יותם
שוויוני		
יחסי		
מזעור נזקים		
שניים אוחזין בטלית		

המשימה הבאה שלנו היא לבנות מערכת מכלים הממשת את כלל "שניים אוחזין בטלית". לשם כך נפתח תחילה נוסחה המתארת את הפתרון לפי כלל זה.

נסמן את הדרישה של נושה 1 ב-X, את הדרישה של נושה 2 ב-Y, ואת גובה הרכוש ב-Z. מכיוון שאנחנו במצב של פשיטת רגל, בהכרח סכום הדרישות גדול מהרכוש, ולכן $X+Y>Z$. נניח כי נושה 1 דורש לפחות כמו נושה 2, כלומר $X\geq Y$.

כדי לפתח נוסחה המתארת את הפתרון לפי כלל "שניים אוחזין בטלית", נפריד את הדיון לשלושה מקרים.

מקרה ראשון: $Z\leq Y\leq X$. במקרה זה, שני הנושים דורשים את כל הרכוש לעצמם. לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" הם חולקים את הרכוש, כלומר כל אחד מהם יקבל מחצית מהרכוש - $\frac{Z}{2}$.

מקרה שני: $Y<Z\leq X$. במקרה זה נושה 1 דורש את מלוא הרכוש, ונושה 2 דורש פחות ממלוא הרכוש. במצב זה, נושה 2 מוותר לנושה 1 על $Z-Y$ מהרכוש. שארית הרכוש, שגודלה Y, מתחלקת בין שני הנושים שווה בשווה. לכן נושה 2 יקבל $\frac{Y}{2}$ ונושה 1 יקבל $Z-\frac{Y}{2}$.

מקרה שלישי: $Y \le X < Z$. במקרה זה שני הנושים דורשים פחות ממלא הרכוש. נושה 1 מוותר לנושה 2 על רכוש שגודלו $Z-X$, ונושה 2 מוותר לנושה 1 על רכוש שגודלו $Z-Y$. שארית הרכוש, שהיא $X+Y-Z = Z-(Z-X)-(Z-Y)$, מתחלקת בין השניים שווה בשווה. לכן:

נושה 1 יקבל: $\frac{Z+X-Y}{2} = \frac{X+Y-Z}{2} + Z-Y$;

נושה 2 יקבל: $\frac{Z+Y-X}{2} = \frac{X+Y-Z}{2} + Z-Y$.

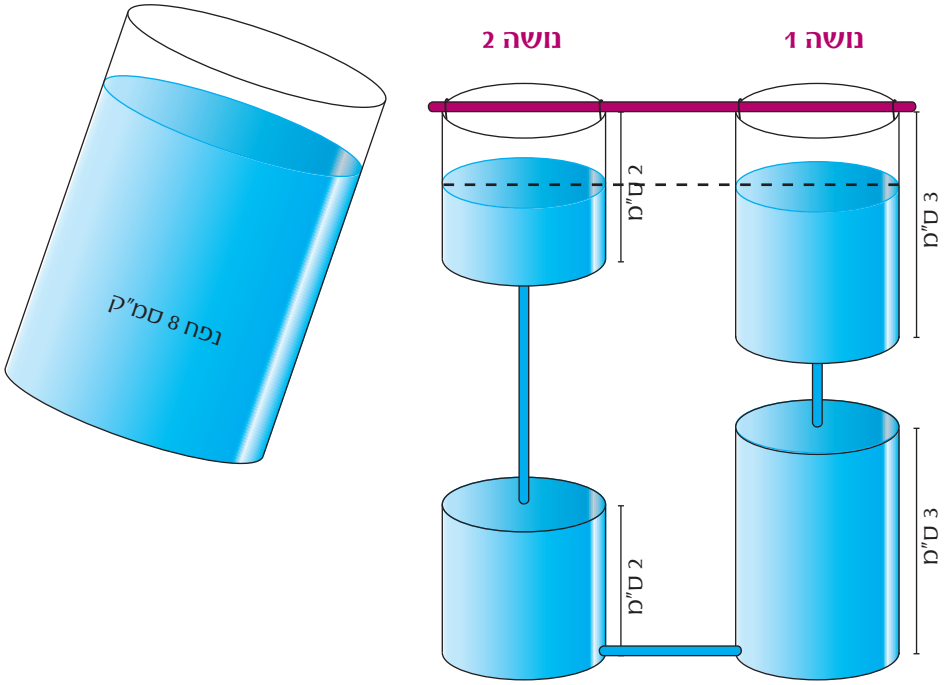
בטבלה שלהלן מסוכם כלל "שניים אוחזין בטלית".

	נושה 1	נושה 2
$Z \le Y \le X$	$\frac{Z}{2}$	$\frac{Z}{2}$
$Y < Z \le X$	$Z-\frac{Y}{2}$	$\frac{Y}{2}$
$Y \le X < Z$	$\frac{Z+X-Y}{2}$	$\frac{Z+Y-X}{2}$

איור 5: כלל "שניים אוחזין בטלית"

נתבונן כעת במערכת המכלים המופיעה באיור 6. בניגוד למערכות המכלים הקודמות שראינו, שבהן כל נושה יוצג על ידי מכל אחד, כאן כל נושה מיוצג על ידי שני מכלים: אחד הונח על הרצפה והשני תלוי מהתקרה, וביניהם מחבר צינור דק. שטח הפנים של כל מכל הוא 1 סמ"ר, והגובה של כל מכל הוא מחצית מהדרישה של הנושה שאותו הוא מייצג.

בעבור שני נושים המחזיקים בדרישות 6 ו-4 בהתאמה ושווי רכוש של 8, המערכת תיראה כך:



איור 6: מערכת המכלים המתאימה לכלל שניים אוחזין בטלית.

לאחר שהתקנו את המערכת, אנחנו מוזגים נוזל למכלים. מערכת הצינורות מבטיחה שהמים יזרמו תחילה למכלים שנמצאים על הרצפה ולאחר מכן למכלים התלויים מהתקרה. לאחר סיום המזיגה, נמדוד לכל נושה את נפח המים המצויים בשני המכלים המייצגים אותו, ובהתאם לכך נקבע את הסכום שיקבל הנושה.

באיור 6 הנוזל שנפחו 8 סמ"ק מתחלק כך:

- תחילה יתמלאו שני המכלים הנמוכים בנפח כולל של 5 סמ"ק - 3 סמ"ק במכל של נושה 1 ו-2 סמ"ק במכל של נושה 2.
- 3 סמ"ק נוספים יחולקו בין המכלים התלויים מהתקרה כמו שראינו בכלל מזעור נזקים.

בסופו של דבר נקבל: 5 סמ"ק במכלים של נושה 1 ו-3 סמ"ק במכלים של נושה 2. לכן נושה 1 יקבל 5 ונושה 2 יקבל 3.

תרגיל 36: פתרו לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" בעיית פשיטת רגל שבה יש לחלק רכוש של 80 ₪ בין רם, שדרישתו 60 ₪, לבין יותם, שדרישתו 40 ₪. האם הפתרון מתאים לפתרון המתקבל באמצעות מערכת מכלים הדומה למערכת שבאיור 6?

בתרגיל 36 ראינו מקרה שבו שתי הדרישות קטנות מערך הרכוש, ומערכת המכלים אכן מתאימה לכלל שניים אוחזין בטלית.

מדוע מערכת זו מתאימה לכלל החלוקה של שניים אוחזין בטלית? נתבונן באיור 7, שבו הדרישה של נושה 1 היא X, הדרישה של נושה 2 היא Y, והרכוש הוא Z. כזכור, שטח הפנים של כל מכל הוא 1 סמ"ר, גובה כל אחד משני המכלים המייצג את נושה 1 הוא $\frac{X}{2}$ ס"מ, וגובה כל אחד משני המכלים שמייצג את נושה 2 הוא $\frac{Y}{2}$ ס"מ. שימו לב שכמו קודם אנו מניחים כי $X \geq Y$.

כל עוד הרכוש Z קטן וכך גם כמות המים המייצגת אותו (דבר המתאים למקרה הראשון), לאחר מזיגת המים בנפח Z הם לא יעברו את גובה המכל התחתון של נושה 1. במצב זה, הנוזל יתחלק שווה בשווה בין הנושים, והנושים יתחלקו שווה בשווה ברכוש. דבר זה קורה כל עוד $Z \leq Y$. כלומר, אם $Z \leq Y \leq X$, כל אחד מהנושים מקבל $\frac{Z}{2}$, בדיוק כפי שמתקבל לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" (ראו בשורה הראשונה בטבלה באיור 5).

אם כמות המים בדלי גדולה דיה וגובה המים במכל התחתון של נושה 1 עובר את גובה המכל התחתון של נושה 2, אך שום טיפה אינה נכנסת למכל העליון של נושה 1 (דבר המתאים למקרה השני) - הרי נושה 2 מקבל רכוש שגודלו $\frac{Y}{2}$, ונושה 1 מקבל את שארית הרכוש, $Z-\frac{Y}{2}$. כדי שהדבר יקרה, כמות המים בדלי צריכה למלא לחלוטין את המכל התחתון של נושה 2, כלומר צריך להתקיים $Z>Y$. כמו כן, למים במכל העליון של נושה 1 אסור לעבור את הגובה $\frac{Y}{2}-\frac{X}{2}$. לכן, כמות הרכוש Z צריכה לקיים: $Z \le (\frac{X}{2}) + (\frac{X-Y}{2}) = X - (\frac{Y}{2})$.

לכן, כאשר $Y<Z\le X$, נושה 2 יקבל $\frac{Y}{2}$ ונושה 1 יקבל $Z-\frac{Y}{2}$. תוצאה דומה מתקבלת גם לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" (ראו בשורה השנייה בטבלה באיור 5).

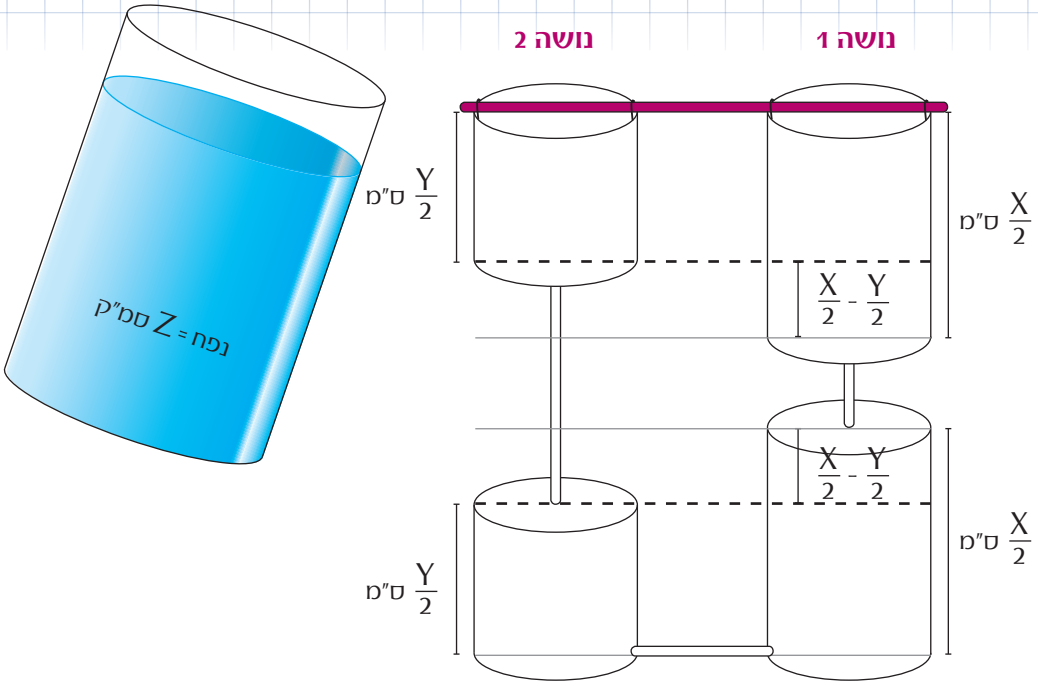
כיצד נחשב את כמות המים במכלים של הנושים כאשר כמות המים בדלי גדולה עוד יותר והם נכנסים גם למכל העליון של נושה 2 (דבר המתאים למקרה השלישי)? תחילה מזגנו מים בנפח Y, שהתחלקו שווה בשווה בין המכלים התחתונים ומילאו את המכל התחתון של נושה 2 עד תומו. בשלב זה כל נושה קיבל מים בנפח $\frac{Y}{2}$. לאחר מכן הזרמנו מים בנפח X-Y, שזרמו אך ורק למכלים של נושה 1, ומפלס המים במכלים אלה הגיע לבסיס התחתון של המכל העליון של נושה 2. עד שלב זה נושה 1 קיבל מים בנפח $X-\frac{Y}{2}$ ונושה 2 קיבל מים בנפח $\frac{Y}{2}$. השארית, שנפחה Z-X, מתחלקת שווה בשווה בין שני הנושים, וכל אחד מהם מקבל $\frac{Z-X}{2}$. לכן, בסופו של דבר:

נפח המים שקיבל נושה 1: $X-\frac{Y}{2}+\frac{Z-X}{2} = \frac{Z+X-Y}{2}$;

נפח המים שקיבל נושה 2: $\frac{Y}{2}+\frac{Z-X}{2} = \frac{(Z+Y-X)}{2}$.

גם במקרה זה מתקבלת תוצאה זהה לזו שהתקבלה לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" (ראו בשורה השלישית בטבלה באיור 5).

לסיכום, בכל המקרים התוצאה המתקבלת ממערכת המכלים שמופיעה באיור 7 זהה לתוצאה המתקבלת לפי כלל "שניים אוחזין בטלית", ולכן הצלחנו לממש את כלל "שניים אוחזין בטלית" באמצעות מערכת מכלים.



איור 7: מערכת מכלים המתאימה לכלל שניים אוחזין בטלית.

כעת, כשיש בידינו מערכת מכלים המתארת את כלל שניים אוחזין בטלית, נוכל להשתמש בה כדי לבחון אם הכלל מקיים תכונות מסויימות. היעזרו במערכת המכלים לפתרון תרגיל 37.

תרגיל 37: רשמו אילו מהתכונות שלהלן מתקיימות בכלל שניים אוחזין בטלית. נמקו את תשובתכם.

(א) "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"

(ב) סימטריה

(ג) מונוטוניות

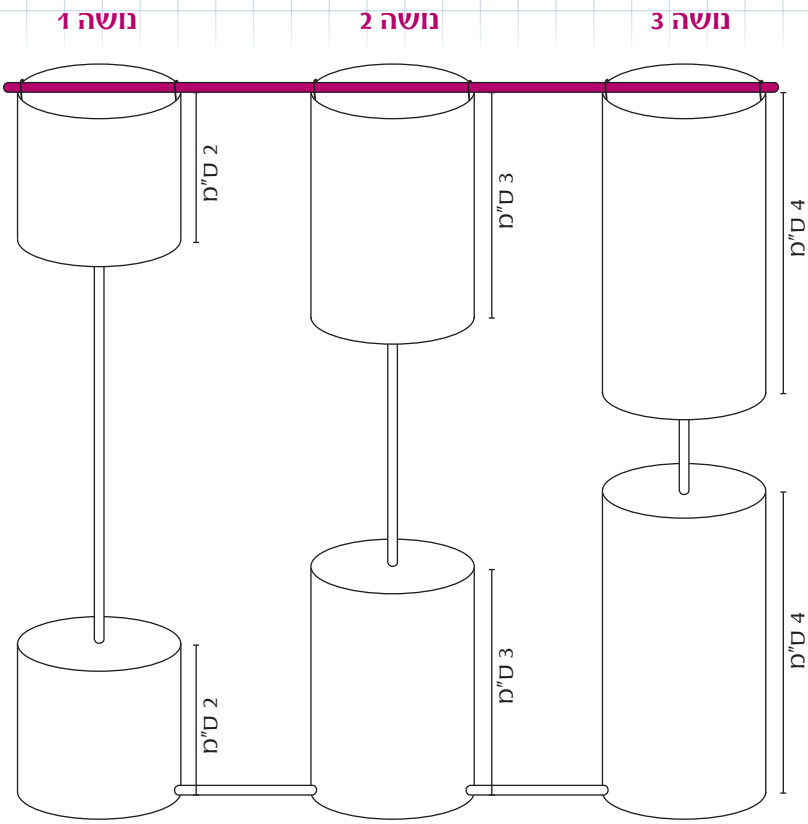
4.3 כלל החלוקה של רבי נתן

בפרקים הקודמים ראינו איך אפשר לתאר כללי חלוקה באמצעות מערכת מכלים. בפרק זה נבנה מערכת מכלים שתגדיר כלל החלוקה. כלומר, כמות המים שתימזג למכל המתאים לנושה תקבע את הסכום שיקבל אותו נושה.

מערכת המכלים שנבנה היא הרחבה של מערכת המכלים שבנינו לכלל "שניים אוחזין בטלית" והיא מתוארת כך:

- לכל נושה נבנה שני מכלים בעלי שטח פנים של 1 סמ"ר וגובה כל אחד מהם מחצית הדרישה של הנושה.
- את שני המכלים של הנושה נציב זה מעל זה - אחד תלוי מהתקרה והשני מונח על הרצפה, ונחברם בצינור דק.
- כל המכלים המונחים על הרצפה יחוברו ביניהם בצינורות דקים.

בעבור שלושה נושים המחזיקים בדרישות 4, 6 ו-8 בהתאמה, המערכת תיראה כך:



איור 8: מערכת המכלים המגדירה את הכלל החדש.

תרגיל 38: ציירו מערכת מכלים המתאימה לבעיית הירושה של רחל, חנה ודבורה (ראו עמוד 7), לפי כלל החלוקה של רבי נתן. השתמשו במערכת המכלים כדי לפתור את הבעיה בשלושת המקרים של גובה העיזבון - 100 דינר, 200 דינר, 300 דינר.

(א) עיזבון של 100 דינר:

(ב) עיזבון של 200 דינר:

(ג) עיזבון של 300 דינר:

אפשר לראות שהפתרונות שהציעה המשנה בשלושת המקרים זהים לפתרונות שקיבלנו במערכת המכלים. מכיוון שהמשנה המדברת על שלוש האלמנות מיוחסת לרבי נתן, נקרא לכלל החלוקה המתאים למערכת המכלים בשם "כלל רבי נתן". האם רבי נתן בנה מערכת מכלים לפני אלף וחמש מאות שנה? לצערנו איננו יודעים את התשובה.

תרגיל 39: מצאו את הפתרון לבעיית הירושה של רחל, חנה ודבורה לפי כלל רבי נתן במקרה שבו העיזבון הוא 510 דינר.

תרגיל 40: הראו באמצעות דוגמה, שכלל רבי נתן אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

מערכת המכלים המגדירה את כלל רבי נתן מורכבת משתי מערכות מכלים:

המכלים המונחים על הרצפה הם מימוש של כלל החלוקה השווה על תנאי, והמכלים התלויים מהתקרה הם מימוש של כלל מזעור הנזקים.

הבחנה זו מאפשרת להבין את ההיגיון העומד מאחורי כלל רבי נתן:

תחילה מחלקים את הרכוש לפי כלל החלוקה השווה על תנאי (כאשר התנאי הוא שנושה לא מקבל יותר ממחצית הדרישה שלו), עד שכל הנושים קיבלו מחצית מסך הדרישות שלהם. לאחר מכן מחלקים את הרכוש שנותר לפי כלל מזעור הנזקים.

כלל רבי נתן משלב, אם כן, את היתרונות של כלל החלוקה השווה על תנאי ושל כלל מזעור נזקים.

שלוש האלמנות מהמחזה "מועדון האלמנות העליזות". באדיבות תיאטרון יידישפיל.

5. סיכום

בחוברת עברנו על נושאים אלה:

- הגדרנו את המושגים בעיית פשיטת רגל, פתרון לבעיות פשיטת רגל וכלל חלוקה.
- ראינו תכונות מסוימות שכללי חלוקה יכולים לקיים. תכונות אלה מביעות דרישות הוגנות שונות לחלוקה של רכוש במצב של פשיטת רגל.
- ראינו כללי חלוקה שונים ובדקנו אילו תכונות הם מקיימים.
- מימשנו כללי חלוקה באמצעות מערכת מכלים, וראינו כיצד אפשר להשתמש במערכת מכלים כדי לבדוק קיום של תכונות מסויימות בכלל חלוקה.
- ראינו את הקשר בין שני כללי חלוקה שהוצעו במשנה - כלל "שניים אוחזין בטלית" וכלל רבי נתן - באמצעות מערכות מכלים הממשות אותם, ובדקנו אילו תכונות מקיימים הכללים.

לאחר סיום קריאת החוברת אתם עשויים לתהות מה הקשר בין בעיות פשיטת הרגל שעסקנו בהן לתחום תורת המשחקים, המופיעה בכותרת החוברת. תורת המשחקים היא תחום במתמטיקה העוסק במצבים שבהם משתתפים כמה גורמים, הנקראים שחקנים. לכל אחד מהשחקנים יש מטרה שהוא מנסה להשיג, והיא עשויה להיות שונה מהמטרות של השחקנים האחרים. בבעיות פשיטת רגל, השחקנים הם הנושים והמטרה של כל נושה היא להגדיל את הסכום שיקבל מתוך הרכוש. אחת המטרות של תורת המשחקים היא למצוא דרכים הוגנות לאזן בין המטרות של השחקנים. אם אתם מעוניינים ללמוד עוד על תורת המשחקים או להעשיר את הידע שלכם בתחומים אחרים, היכנסו לאתר הפרויקט "כדאי לדעת" בכתובת goodtoknow.tau.ac.il.

פתרונות לתרגילים

תרגיל 1: הציעו שתי דרכים שונות לחלוקת הסכום 30,000 ש"ח בין יוסי לאילן. הסבירו את השיקולים לבחירה בכל אחת מהאפשרויות.

פתרון: אפשר להציע כל חלוקה של 30,000 לשניים ולנמק בהתאם לסיבות שהנחו אתכם לבחור בחלוקה. למשל:

חלוקה שבה יוסי מקבל את כל הסכום (30,000) ואילן לא מקבל דבר.

הנימוק: מכיוון שיוסי הסכים להשקיע יותר מאילן והפגין חברות טובה יותר כלפי יואל, מגיע לו לקבל את השקעתו במלואה לפני אילן.

תרגיל 2: בבעיית העוגה, איך תחלקו את העוגה בין המנצחים? הסבירו את שיקוליכם.

פתרון: אפשר להציע כל חלוקה של 500 גרם לשלושה חלקים ולנמק בהתאם לסיבות שהנחו אתכם לבחור בחלוקה. למשל:

חלוקה שבה מיטל מקבלת 300 גרם, יוני מקבל 150 גרם, ויסמין מקבלת 50 גרם.

הנימוק: אין לפגוע בפרס של המקום הראשון כי המקום הראשון חשוב יותר. ההפרש בין המשקל שהובטח למשקל שחולק הוא 100 גרם, ולכן הפגיעה בכל אחד מהזוכים במקומות השני והשלישי תהיה שווה: כל אחד מהם יקבל 50 גרם פחות מהפרס שהבטיחה המורה.

תרגיל 3: בבעיית דמי הכיס, איך תחלקו את 100 השקלים בין רם ליותם?

פתרון: אפשר להציע כל חלוקה של 100 לשניים ולנמק בהתאם לסיבות שהנחו אתכם לבחור בחלוקה. למשל:

חלוקה שבה כל אחד מהאחים מקבל 50 ₪.

הנימוק: רם הוא האח הגדול והוא יבין שאפשר להסתדר עם סכום כסף נמוך מזה שהובטח.

תרגיל 4:

(א) בבעיית הירושה, איזו אישה מרוצה פחות בכל אחד מהמקרים?

פתרון: בכל מצב אפשר לחשוב על טיעונים שונים של כל אחת מהנשים המסבירים מדוע הפתרון אינו הוגן כלפיה. נציג טיעונים אפשריים:

- טיעון המסביר מדוע דבורה אינה מרוצה כאשר העיזבון הוא 100 דינר: כאשר העיזבון הוא 100 דינר, כל הנשים מקבלות סכום זהה אף שכתובתה של דבורה גבוהה פי שלושה מכתובתה של רחל.

- טיעון המסביר מדוע רחל אינה מרוצה כאשר העיזבון הוא 300 דינר: אילו העיזבון היה 200 דינר בלבד החלוקה הייתה 75 דינר לדבורה ולחנה ו-50 לרחל. כאשר העיזבון הוא 300 דינר ולא 200, נוספים 100 דינר שיש לחלק בין הנשים. ואולם מהסכום הנוסף נהנות רק דבורה ורחל, מכיוון שהחלוקה היא 150 לדבורה, 100 לחנה ו-50 לרחל. מכאן - מתוך 100 הדינר הנוספים קיבלה דבורה 75, חנה 25 ורחל לא קיבלה דבר. רחל יכולה לטעון שגם מ-100 הדינר האחרונים מגיע לה לקבל דבר מה, וודאי שכאשר העיזבון הוא 300 עליה לקבל יותר מ-50 דינר.

(ב) בבעיית הירושה, האם אפשר להבחין בהיגיון שהנחה את הפתרונות שהוצעו במשנה?

פתרון: בהמשך החוברת נציג כללים למציאת פתרונות לבעיות פשיטת רגל ונדון גם בכלל העומד מאחורי החלוקות המוצגות בטבלה. בשלב זה, אפשר לזהות מאפיינים שונים המתקיימים בפתרונות המוצגים בטבלה.

תרגיל 5: בבעיית שניים אוחזין בטלית, הציעו אופן חלוקה שונה מהמוצע במשנה למקרה שבו צד אחד טוען שכל הטלית שייכת לו והצד האחר טוען שמחצית הטלית שייכת לו.

פתרון: הציעו פתרון בהתאם להיגיון המנחה אתכם, והסבירו מה עומד מאחורי החלטתכם. למשל: חלוקה של כל הטלית לצד שטוען שכולה שלו, מכיוון שאין לחלק את הרכוש לשני אנשים שונים.

תרגיל 6: חשבו על בעיית פשיטת רגל הקשורה לחיי היום-יום שלכם. תארו אותה, הציגו ערכים מספריים לרכוש ולדרישה של כל נושה, והציעו פתרון לבעיה.

פתרון: תוכלו לחשוב על כל בעיה שהיא מחיי היום-יום שלכם. הדוגמאות שהצגנו עד כה בחוברת הן דוגמאות אפשריות. פתרון ליישוב הבעיה נתון אף הוא לשיקול דעתכם, כפי שראיתם בתרגילים הקודמים.

תרגיל 7:

(א) האם פתרון המקיים את התכונה מונוטוניות מקיים בהכרח גם את התכונה סימטריה?

פתרון: כן! נניח שהפתרון מקיים את התכונה מונוטוניות, ואנחנו רוצים להראות שהוא מקיים גם סימטריה. לשם כך יש להראות שאם לשני נושים, נאמר אביאל וברק, יש אותה דרישה, הם מקבלים בפתרון אותו סכום. מכיוון שלאביאל ולברק יש אותה דרישה, הרי אביאל דורש לפחות כמו ברק וברק דורש לפחות כמו אביאל. מכיוון שהפתרון מונוטוני ואביאל דורש לפחות כמו ברק - אביאל מקבל לפחות כמו ברק. מכיוון שהפתרון מונוטוני וברק דורש לפחות כמו אביאל - ברק מקבל לפחות כמו אביאל. לכן אביאל מקבל לפחות כמו ברק וברק מקבל לפחות כמו אביאל, ומכאן ששניהם מקבלים בדיוק אותו סכום.

(ב) האם פתרון המקיים סימטריה מקיים בהכרח גם מונוטוניות?

פתרון: לא! נבחן בעיה שבה שני הנושים הם אביאל וברק, והדרישה של אביאל גדולה מזו של ברק. מכיוון שאין שני נושים בעלי דרישות זהות, כל פתרון לבעיה מקיים את התכונה סימטריה. בפרט, הפתרון

שבו ברק מקבל את כל הרכוש מקיים את התכונה סימטריה. אבל פתרון זה אינו מקיים את התכונה מונוטוניות מכיוון שהדרישה של אביאל גדולה מזו של ברק ואביאל מקבל פחות מברק בפתרון זה.

תרגיל 8: בבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול", הציעו פתרון נוסף המקיים את התכונות מונוטוניות, סימטריה ו"נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

פתרון: אפשר להציע פתרונות רבים המקיימים את שלוש התכונות. למשל, פתרון שבו נבחר נושים לפי סדר הדרישות, מהגדולה ביותר ועד הקטנה ביותר, ובכל פעם נחלק לנושה שנבחר את הדרישה שלו. אם בשלב מסוים יהיו שני נושים בעלי דרישה זהה ולא יהיה אפשר לחלק לשניהם את מלוא דרישתם, נחלק ביניהם את הסכום שנשאר לחלוקה שווה בשווה. הפתרון יהיה:

- ליאת – 300,000 ₪
- אלעד – 100,000 ₪
- רונן – 100,000 ₪
- דני – 0 ₪

תרגיל 9: (א) בבעיית הפרויקט העירוני, אילו תכונות מבין השלוש שצוינו - "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו", סימטריה ומונוטוניות - מתקיימות בפתרון של מנהל הפרויקט ואילו אינן מתקיימות?

פתרון:

- יאיר מקבל 70 ₪ כאשר הדרישה שלו היא 50 ₪, ולכן הפתרון אינו מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".
- יאיר ודליה מקבלים שני סכומים שונים אף שהדרישות של שניהם זהות. לכן הפתרון אינו מקיים את התכונה סימטריה.
- דליה מקבלת פחות מרוני, אף שהדרישה של דליה גבוהה מהדרישה של רוני. לכן הפתרון אינו מקיים את התכונה מונוטוניות.

(ב) האם הפתרון שבחר מנהל הפרויקט הוגן?

פתרון: ראינו בסעיף הקודם שהפתרון הנבחר אינו מקיים אף תכונה מהתכונות שהצגנו עד כה. בהתאם לכך, אפשר להעלות טיעונים רבים נגד הפתרון. למשל:

- דליה תטען שאין זה הוגן שהיא מקבלת פחות מיאיר שדורש כמוה, ואין זה הוגן שהיא מקבלת פחות מרוני שדורשת פחות ממנה.
- דליה ורוני עשויות לטעון שאין זה הוגן שיאיר מקבל יותר מהסכום שדרש.
- דליה תטען שאין זה הוגן שהיא היחידה מבין כל הנושים שמקבלת פחות מהדרישה שלה.

המסקנה מהטיעונים שהצגנו היא שהפתרון אינו הוגן כלפי דליה.

תרגיל 10: האם כלל החלוקה השווה מקיים את התכונה מונוטניות?

פתרון: לפי כלל החלוקה השווה כל הנושים מקבלים את אותו סכום בפתרון, לכן אין זוג נושים שאחד מהם מקבל פחות מהאחר. בפרט, אין זוג נושים שבהם אחד מקבל פחות מהאחר בעוד הדרישה שלו גדולה יותר. לכן כלל החלוקה השווה מקיים את התכונה מונוטניות.

תרגיל 11: ליאת מוכרת לבעלה יואב מחצית משטר החוב שלה. כמה יקבלו ליאת ובעלה יחד בפתרון הבעיה החדשה?

פתרון: בבעיה החדשה יש חמישה נושים המחזיקים בדרישות אלה:

- דני – 100,000 ₪
- ליאת – 150,000 ₪
- יואב – 150,000 ₪
- רונן – 200,000 ₪
- אלעד – 200,000 ₪

הפתרון לפי השופט משה יהיה:

- דני – 100,000 ₪
- ליאת – 150,000 ₪
- יואב – 150,000 ₪
- רונן – 50,000 ₪
- אלעד – 50,000 ₪

כלומר, ליאת ובעלה יואב יקבלו יחד 300,000 ₪.

תרגיל 12: מה אפשר להסיק מהדוגמה של ליאת בבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" באשר לחשיבותה של התכונה מונוטוניות בכלל חלוקה?

פתרון: הראינו שהשימוש של השופט בכלל חלוקה שאינו מונוטוני מעודד נושים לפעול להקטנת הדרישה שלהם, להסתיר חלק מדרישתם או להעביר חלק מהחוב שחייבים להם לנושה חדש. תופעה זו מביאה לחוסר יציבות מכיוון שלאחר שנושה אחד מקטין או מפצל את דרישתו, ייתכן שנושה שני יעדיף להקטין או לפצל את דרישתו, ולאחריו נושה שלישי יעשה זאת, וכן הלאה.

שימו לב: כלל המקיים מונוטוניות אינו מבטיח בהכרח שפיצול דרישות לא ישתלם לנושה זה או אחר. דוגמה לכך היא כלל החלוקה השווה המקיים תכונה זו, כפי שראינו בתרגיל הקודם. אף שהוא מונוטוני – כדאי לפצל את הדרישה כשהחלוקה נעשית על פיו. בבעיה שיש בה שני נושים, על פי הכלל כל נושה יקבל מחצית מהרכוש. אם אחד הנושים יתפצל לשני נושים נפרדים, נקבל בעיה חדשה, ובפתרונה

לפי כלל החלוקה השווה יקבל כל נושה שליש מהרכוש. לכן הנושה המפוצל, שמייצגים אותו כעת שני נושים, יקבל בסך הכול שני שלישים מהרכוש.

מנגד, פתרון שאינו מונוטוני בהכרח מביא למצב שבו פיצול דרישות ישתלם לאחד הנושים לפחות.

תרגיל 13: מצאו זוג נושים בבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" שבעבורם הפתרון לפי כלל החלוקה עקבי. פרטו מדוע.

פתרון: בפתרון הבעיה המקורית לפי כלל החלוקה, רונן ודני מקבלים סכום זהה - 83,333 ₪. בבעיה המצומצמת, יש לחלק לרונן ולדני רכוש בסך 166,666 ₪ לפי דרישות אלה:

- דני - 100,000 ₪
- רונן - 200,000 ₪

בפתרון הבעיה החדשה לפי הכלל, רונן יקבל מחצית מהרכוש ולאחר מכן דני יקבל מחצית מהרכוש גם הוא. כלומר, שניהם יקבלו אותו סכום - 83,333 ₪, ממש כפי שקיבלו בפתרון הבעיה המקורית. לכן הפתרון עקבי לזוג הנושים רונן ודני.

תרגיל 14: בדיקה של התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

(א) נתבונן בבעיית הפרויקט העירוני, שבה הדרישות לחלוקת הרכוש בשווי 100 ₪ הן:

- רוני - 20 ₪
- יאיר - 50 ₪
- דליה - 50 ₪

האם הפתרון לבעיה לפי החוק במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"? נמקו את תשובתכם.

פתרון: יאיר ודליה הם שני הנושים שדרישתם היא הגדולה ביותר. לכן כל אחד מהם יקבל מחצית מהרכוש, כלומר 50 ₪, ורוני לא תקבל דבר. אפשר לראות שאין נושה שיקבל יותר מהדרישה שלו, ולכן בפתרון לבעיה זו התכונה מתקיימת.

(ב) נתבונן בבעיית הפרויקט העירוני שבה דרישות הנושים הן:

- רוני - 30 ₪
- יאיר - 40 ₪
- דליה - 40 ₪

האם הפתרון המתקבל לפי כלל החלוקה במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"?

פתרון: יאיר ודליה הם שני הנושים שדרישתם היא הגדולה ביותר. לכן כל אחד מהם יקבל מחצית מהרכוש, כלומר 50 ₪, ורוני לא תקבל דבר. אפשר לראות שיאיר ודליה מקבלים יותר מהדרישה שלהם ולכן הפתרון אינו מקיים את תכונת "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

תרגיל 15: האם כלל החלוקה במדינת ווסטרוס מקיים את התכונה סימטריה?

פתרון: כן! נראה שפתרון לפי כלל החלוקה במדינת ווסטרוס מקיים סימטריה בכל בעיית פשיטת רגל, ולכן כלל החלוקה מקיים את התכונה סימטריה.

נוכיח זאת: נבחן את שני הנושים, אביאל וברק, ונניח שלשניהם אותה דרישה. הדרישה שלהם יכולה להיות הגדולה ביותר (ייתכן שיש נושים נוספים בעלי דרישה זו) או שהדרישה שלהם קטנה מהדרישה הגדולה ביותר. נבחן את שני המצבים.

- אם הדרישה של אביאל וברק היא הגדולה ביותר, הם יקבלו סכום זהה בפתרון. הסכום שכל אחד מהם יקבל הוא גובה הרכוש חלקי מספר הנושים בעלי הדרישה הגבוהה ביותר.
- אם הדרישה שלהם אינה הגבוהה ביותר, שניהם לא יקבלו דבר.

בכל מקרה, אביאל וברק יקבלו אותו סכום.

תרגיל 16: הראו באמצעות בעיית הפרויקט העירוני שכלל החלוקה של מדינת ווסטרוס אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

פתרון: בבעיה המוצגת, יאיר ודליה הם בעלי הדרישה הגבוהה ביותר, ולפי החוק בווסטרוס, יש לחלק את הרכוש ביניהם. לפי כלל זה, רוני תקבל 0 ₪, יאיר יקבל 50 ₪ (חצי מ-100 ₪) ודליה תקבל 50 ₪. כלומר רוני ויאיר יחד יקבלו 50 ₪.

אם יאיר ורוני יתאחדו לנושה אחד נקבל בעיה חדשה שיש בה שני נושים, ואלה דרישותיהם:

- יאיר ורוני יחד – 70 ₪
- דליה – 50 ₪

בבעיה החדשה, הנושה "יאיר ורוני יחד" הוא בעל הדרישה הגבוהה ביותר ולכן כל הרכוש בגובה 100 ₪ יועבר אליו, בעוד שבפתרון הבעיה המקורית הם קיבלו יחד 50 ₪.

לכן במקרה זה אין יציבות לאיחוד נושים, והתכונה "יציבות לאיחוד נושים" אינה מתקיימת בכלל החלוקה של מדינת ווסטרוס.

תרגיל 17: הציעו בעיה נוספת שבה החוק החדש בווסטרוס אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים", והסבירו מדוע התכונה אינה מתקיימת.

פתרון: אפשר למצוא בעיות רבות שבהן כלל החלוקה הנהוג בווסטרוס אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים". נתבונן בבעיה שבה יש שלושה נושים, אביאל ברק ויוני. בבעיה זו:

- הדרישה של יוני היא הגבוהה ביותר;
- סכום הדרישות של אביאל ושל ברק גבוה מהדרישה של יוני.

בבעיה כזו, הנושה יוני יקבל את כל הרכוש. אולם איחוד בין אביאל לברק יוביל לבעיה חדשה, שבה הנושה המכונה "אביאל וברק יחד" יקבל את מלוא הרכוש.

תרגיל 18: מדוע במקרה שבו גם אביאל וגם ברק אינם בעלי הדרישה הגבוהה ביותר, הפתרון עקבי לאביאל ולברק?

פתרון: כאשר אביאל וברק אינם בעלי הדרישה הגבוהה ביותר, איש מהם לא יקבל דבר. נבחן את הבעיה שבה אביאל וברק הם הנושים היחידים ואין רכוש לחלוקה משום שהסכום ששניהם קיבלו יחד בפתרון לבעיה המקורית הוא אפס. במצב זה, הפתרון היחיד האפשרי הוא שאיש מהם לא יקבל דבר. כלומר אביאל וברק מקבלים אותם סכומים בבעיה המקורית ובבעיה המצומצמת לשניהם.

לכן גם במקרה זה הכלל מקיים את התכונה עקביות.

תרגיל 19: רשמו כלל חדש לפתרון בעיית פשיטת רגל ובדקו אם הוא מקיים את התכונות עקביות ו"יציבות לאיחוד נושים".

פתרון: אפשר לחשוב על כללים רבים, גם כללים שנשמעים לא הגיוניים, ולבחון אם הם מקיימים את התכונות הללו. נבדוק, למשל, את הכלל הזה: הרכוש כולו ניתן לנושה בעל הדרישה הקטנה ביותר. אם יש כמה נושים שדרישתם היא הקטנה ביותר, נחלק ביניהם את הרכוש שווה בשווה. בדומה להוכחה בעניין זה לכלל של מדינת ווסטרוס, אפשר להראות שהכלל החדש שהצענו כאן מקיים את התכונה עקביות ואינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

תרגיל 20: (א) כיצד תכריע השופטת דבורה בבעיה שהצגנו בתחילת החוברת, שבה עליה לחלק 30,000 ₪ בין אילן ליוסי, שהשקיעו מכספם במסעדה של יואל? יוסי דורש 40,000 ₪, אילן דורש 20,000 ₪.

פתרון: הרכוש יחולק שווה בשווה בין יוסי לאילן:

- יוסי – 15,000 ₪
- אילן – 15,000 ₪

(ב) מי יהיה פחות מרוצה מחלוקה לפי כלל החלוקה השווה ומדוע?

פתרון: סביר להניח שיוסי יהיה פחות מרוצה מהחלוקה שקבעה השופטת דבורה. יוסי עשוי לטעון שאין זה הוגן שהוא השקיע סכום כסף גדול מאילן ושניהם מקבלים סכום זהה.

(ג) מה ההפרש בין דרישתו של כל אחד מהנושים לבין הסכום שקיבל בפתרון זה?

פתרון: ההפרש בין דרישתו של יוסי לסכום שקיבל הוא 25,000 ₪. לעומת זאת, ההפרש בין דרישתו של אילן לסכום שקיבל הוא 5,000 ₪.

(ד) האם אתם סבורים שכלל החלוקה של דבורה הוגן? מדוע?

פתרון: מצד אחד, אפשר לטעון שהכלל מקפח את יוסי, שהפסיד בגין ההלוואה שנתן ליואל יותר מאשר אילן. מצד שני, אם יוסי הוא בעל ממון רב, אפשר לטעון שהחלוקה הוגנת משום שהפסד של 5,000 ₪ משמעותי בעבור אילן באותה מידה שהפסד של 25,000 ₪ משמעותי בעבור יוסי.

(ה) תנו דוגמה לבעיית פשיטת רגל שבה פתרון לפי כלל החלוקה השווה של דבורה אינו מקיים את התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו".

פתרון: אפשר לשנות את הדרישה של אילן בבעיית המסעדה ל-10,000 ₪, ותתקבל בעיה שבה יש לחלק 30,000 ₪ בהתאם לדרישות אלה:

- יוסי – 40,000 ₪
- אילן – 10,000 ₪

בפתרון בעיה זו לפי כלל החלוקה השווה, אילן יקבל 15,000 ₪, כלומר יותר מהדרישה שלו.

(ו) מדוע התכונה סימטריה מתקיימת בכלל החלוקה השווה של דבורה?

פתרון: כל הנושים בבעיה מקבלים את אותו סכום, ולכן כל שני נושים בעלי דרישה זהה מקבלים סכום זהה.

(ז) האם התכונה מונוטוניות מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה? הסבירו.

פתרון: כן! כל הנושים מקבלים אותו סכום ולא ייתכן מצב שבו נושה אחד יקבל פחות מנושה אחר. בפרט, לא ייתכן שנושה בעל דרישה גדולה מדרישה של נושה אחר או שווה לה יקבל פחות ממנו.

(ח) מדוע התכונה עקביות מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה?

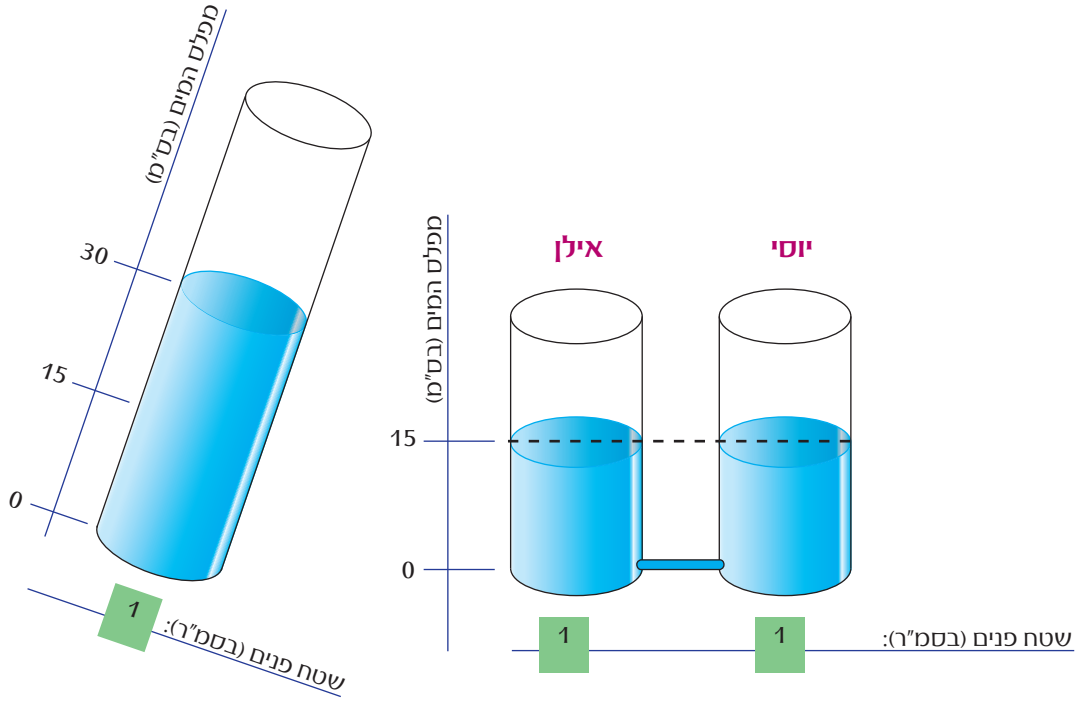
פתרון: כל הנושים מקבלים אותו סכום, נאמר 10 ₪. לכן אם נבחר שני נושים כלשהם, הרי יחד הם מקבלים 20 ₪. אם נפתור את הבעיה המצומצמת לשני נושים אלה לפי כלל החלוקה השווה, נחלק ביניהם שווה בשווה את 20 השקלים, ולכן כל אחד יקבל 10 ₪, וזהו הסכום שכל אחד מהם קיבל בבעיה המקורית.

(ט) התכונה "יציבות לאיחוד נושים" אינה מתקיימת בכלל החלוקה של דבורה. הסבירו מדוע.

פתרון: נניח שבבעיה המקורית היו שלושה נושים. לפי כלל החלוקה, כל אחד מהם מקבל שליש מהרכוש. כלומר נושים 2 ו-3 מקבלים יחד שני שלישים מהרכוש. אם נאחד את נושים 2 ו-3 תיווצר בעיה שבה יש שני נושים בלבד: נושה 1 ונושה המייצג את נושים 2 ו-3 יחד, וכל אחד משני הנושים יקבל מחצית מהרכוש. כלומר, הנושה המאגד את דרישות הנושים 2 ו-3 יקבל פחות ממה שהיו שניהם מקבלים יחד בבעיה המקורית.

תרגיל 21: ציירו מערכת מכלים המתארת את החלוקה השוויונית בבעיית המסעדה, שבה הנושים הם יוסי ואילן. ציינו מהו מפלס המים בדלי הגדול ובמכלים. אל תשכחו לצייר את הצינורות בתחתית.

פתרון: באיור 9 מתוארת מערכת המכלים המתאימה לבעיית המסעדה ובו כל יחידת נפח מים מייצגת 1000 ₪.



איור 9: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 21.

תרגיל 22: אילו מן התכונות - "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו", סימטריה, מונוטוניות, עקביות ו"יציבות לאיחוד נושים" - מתקיימות בכלל החלוקה השווה על תנאי?

פתרון: כל התכונות מתקיימות למעט "יציבות לאיחוד נושים". התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו" מתקיימת מכיוון שלפי הכלל מפסיקים לחלק לנושה מהרכוש כשהוא מקבל את מלוא דרישתו. התכונות סימטריה, מונוטוניות ועקביות מתקיימות באופן דומה לזה שהראינו עבור כלל החלוקה השווה. תכונת יציבות לאיחוד נושים אינה מתקיימת, גם היא בדומה למה שהראינו בעבור כלל החלוקה השווה.

תרגיל 23: עזרו לדבורה להתאים את שיטת המכלים כדי שיהיה אפשר להשתמש במכלים לפתור בעיות פשיטת רגל לפי כלל החלוקה השווה על תנאי. אל תשכחו לציין מה יהיה מיקום הצינורות הדקים המחברים בין המכלים ולצייר אותם.

(א) אילו הנחיות תתנו לברק?

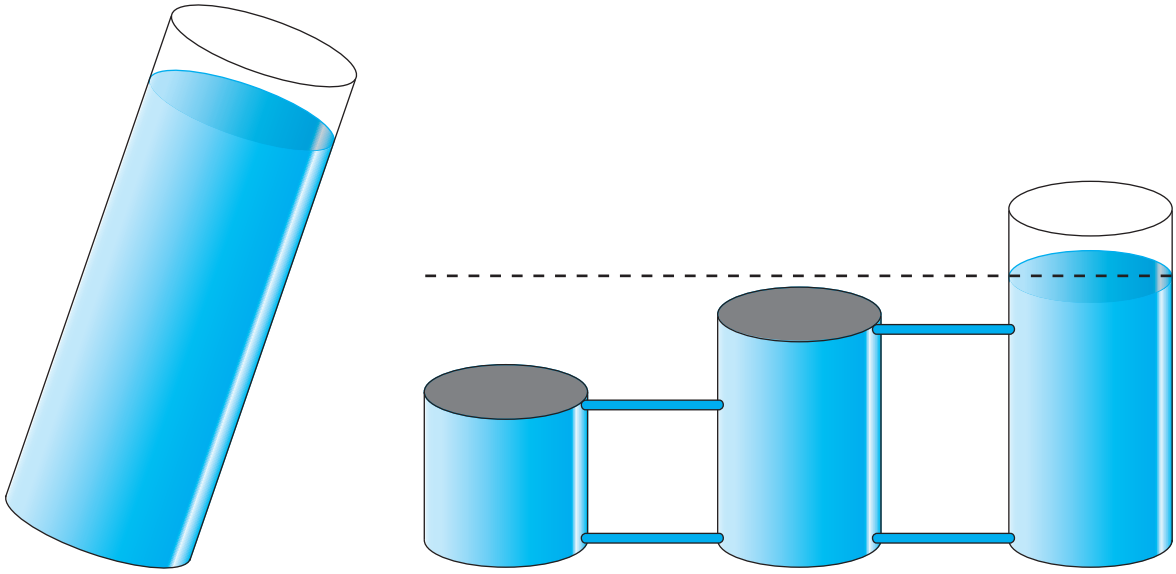
פתרון:

- לפי הנתונים בבעיה, הגדר מהו ערך של יחידת נפח אחת של מים.
- חבר למערכת מכלים שמספרם שווה למספר הנושים. שטח הפנים של כל מכל הוא 1 ס"מר, וגובה כל מכל מתאים לדרישתו של הנושה שהוא מייצג.

- מלא מים בדלי בנפח מתאים לשווי הרכוש.
- מזוג את המים מהדלי למכלים הקטנים שבמערכת.
- כל נושה יקבל סכום כסף המתאים לנפח המים במכל שלו.

(ב) ציירו מערכת מכלים המתארת את כלל החלוקה השווה על תנאי באופן כללי.

פתרון: באיור 10 מתוארת מערכת מכלים המתאימה לכלל החלוקה השווה על תנאי בבעיה שיש בה שלושה נושים. המכלים של נושים בעלי דרישה קטנה מהדרישה הגדולה ביותר חסומים בחלקם העליון במיקום המתאים לגובה הדרישה שלהם, כדי שלא יוכלו לקבל סכום גבוה מדרישתם. צינוריות דקות מחברות בין המכלים בשיא גובהם כדי לאפשר לאוויר לצאת מהם במהלך מזיגת המים למכלים.

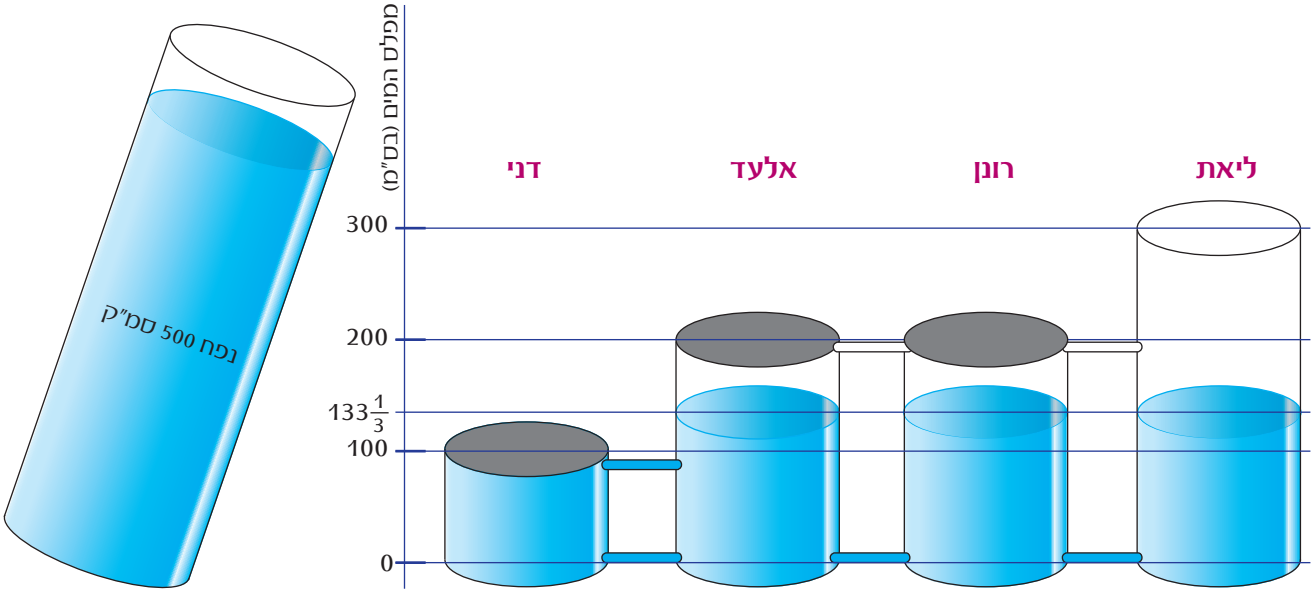


איור 10: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 23.

תרגיל 24:

(א) ציירו מערכת מכלים המתארת את הפתרון לבעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" (המוצגת בעמוד 9) לפי כלל החלוקה השווה על תנאי.

פתרון: באיור 11 מתוארת מערכת מכלים מתאימה ובה כל יחידת נפח של מים שווה 1,000 ₪. לכן הרכוש כולו מיוצג באמצעות 500 יחידות נפח והנושים מיוצגים באמצעות מכלים שגובהם 100, 200 ו-300.



איור 11: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 24.

(ב) פתרו את בעיית פשיטת הרגל של חברת "הכול בזול" לפי כלל החלוקה השווה על תנאי.

פתרון: נשתמש במערכת המכלים המתוארת באיור 11 כדי להגיע לפתרון.

שטח הפנים הכולל של ארבעת המכלים הוא 4 = 1 + 1 + 1 + 1.

כאשר המכל הקטן ביותר, המייצג את דני, מתמלא, מפלס המים במכלים הוא 100, וכמות המים שמזגנו למערכת היא 400 = 4 x 100. מכאן שנותרו בדלי עוד 100 יחידות נפח של מים.

לאחר שהמכל הקטן התמלא, מפלס המים ימשיך לעלות רק במכלים האחרים ולכן שטח הפנים יהיה 3 = 1 + 1 + 1. כשנמזוג את כמות המים שנותרה במכל הגדול, תתקבל עלייה של 33 ס"מ בשלושת המכלים האחרים. ולכן הפתרון יהיה:

- ליאת, אלעד, רונן: $100 + 33\frac{1}{3} = 133\frac{1}{3}$;
- דני: 100.

תרגיל 25: המציאו בעיית פשיטת רגל עם שלושה נושים שבה כלל החלוקה השווה וכלל החלוקה השווה על תנאי מביאים לפתרון זהה.

פתרון: בכל בעיה שיש בה שלושה נושים והדרישה הנמוכה היא לפחות שליש מערך הרכוש, נקבל פתרון זהה לפי שני כללי החלוקה הללו. דבר זה קורה משום שכאשר נשתמש במערכת מכלים המתאימה לכלל החלוקה השווה על תנאי, נרוקן את כל המים מהדלי לפני שהמכל הקטן ביותר מתמלא, ומפלס המים בשלושת המכלים יהיה שווה.

תרגיל 26: רשמו נימוק אחד המסביר מדוע חלוקה לפי הכלל היחסי הוגנת יותר מחלוקה לפי כלל החלוקה השווה.

פתרון: חלוקה לפי הכלל היחסי מתחשבת בגובה הדרישה של כל נושה. ככל שהדרישה של נושה גדולה יותר, החלק שיקבל מתוך הרכוש גדול יותר. במובנים רבים, נראה הוגן לתת יותר למי שהשקיע יותר מכספו ויפסיד יותר אם בעל החוב יאבד את כל כספו.

תרגיל 27: רשמו נימוק אחד המסביר מדוע חלוקה לפי כלל החלוקה השווה הוגנת יותר מחלוקה לפי הכלל היחסי.

פתרון: יש שיגידו שאין להפלות בין הנושים, גם לא על בסיס גובה הדרישות שלהם, ובכל מקרה כל הנושים היו נתונים לסיכון וידעו שהם עלולים להפסיד את כל השקעתם או את חלקה.

תרגיל 28: לכל אחת מהתכונות שלהלן, רשמו אם כלל החלוקה היחסי מקיים אותה. נמקו את תשובתכם.

(א) התכונה "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו" מתקיימת. הסבירו מדוע.

פתרון: תכונה זו מתקיימת מכיוון שהסכום שאותו נושה מקבל הוא הדרישה שלו כפול היחס בין הרכוש לסכום הדרישות. יחס זה קטן מ-1 משום שבבעיית פשיטת רגל הרכוש קטן מסכום הדרישות. לכן הסכום שנושה מקבל שווה לגובה הדרישה שלו כפול מספר הקטן מ-1, והמכפלה קטנה מגובה הדרישה של הנושה.

(ב) סימטריה

פתרון: התכונה סימטריה מתקיימת. אם הדרישות של שני נושים שוות, גם כאשר נכפול אותן ביחס שבין הרכוש לסכום הדרישות נקבל אותה תוצאה. לכן נושים בעלי דרישות שוות מקבלים אותו סכום.

(ג) מונוטוניות

פתרון: התכונה מונוטוניות מתקיימת. אם דרישה של נושה אחד גדולה מדרישה של נושה שני או שווה לה, כאשר נכפול את שתי הדרישות ביחס שבין הרכוש לסכום הדרישות נקבל שהסכום שיקבל הנושה הראשון גבוה מהסכום שיקבל הנושה השני או שווה לו.

(ד) התכונה עקביות מתקיימת. הסבירו מדוע.

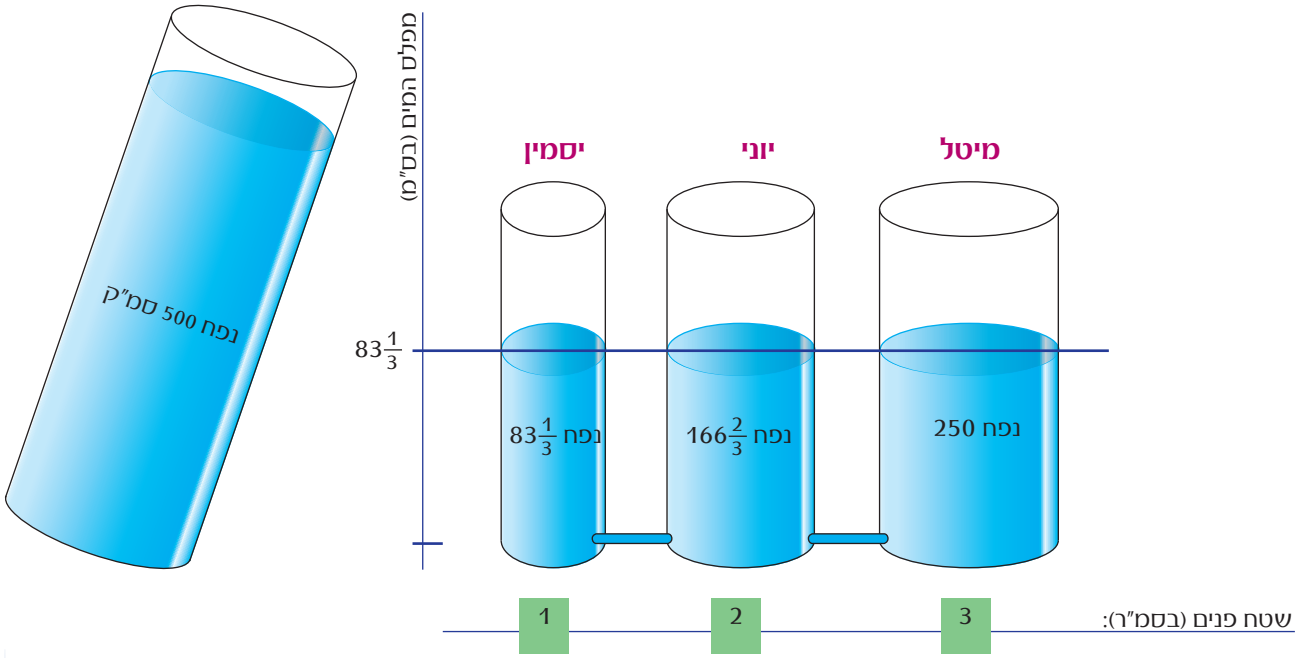
פתרון: נתבונן בשני נושים, למשל אביאל שדרישתו X וברק שדרישתו Y. נסמן ב-Z את גובה הרכוש, וב-W את סך כל הדרישות. לפי כלל החלוקה היחסי, אביאל יקבל $Z\cdot\frac{X}{W}$ וברק יקבל $Z\cdot\frac{Y}{W}$. נתבונן עכשיו בבעיה המצומצמת לאביאל ולברק. בבעיה זו, הדרישה של אביאל היא עדיין X, דרישתו של ברק היא Y, והרכוש הוא $Z\cdot\frac{X}{W}+Z\cdot\frac{Y}{W}=Z\cdot\frac{X+Y}{W}$. מכיוון שסכום הדרישות הוא X+Y, הרי לפי כלל החלוקה היחסי, אביאל יקבל $Z\cdot\frac{X}{W}=Z\cdot\frac{X}{X+Y}\cdot\frac{X+Y}{W}$, וזהו בדיוק הסכום שקיבל בבעיה המקורית. באותו אופן, לפי כלל החלוקה היחסי ברק יקבל $Z\cdot\frac{Y}{W}=Z\cdot\frac{Y}{X+Y}\cdot\frac{X+Y}{W}$, שהוא הסכום שקיבל בבעיה המקורית. לכן כלל החלוקה היחסי מקיים את התכונה עקביות.

(ה) התכונה "יציבות לאיחוד נושים" מתקיימת. הסבירו מדוע.

פתרון: נמשיך עם הפתרון שהצגנו בסעיף ד. אם אביאל וברק מתאחדים, הדרישה של הנושה המאוחד היא X+Y, וסכום הדרישות W לא השתנה. לכן בבעיה שבה אביאל וברק התאחדו, הנושה "אביאל וברק יחד" יקבל $Z\cdot\frac{X+Y}{W}$, וזהו הסכום שקיבלו יחדיו אביאל וברק בבעיה המקורית.

תרגיל 29: (א) ציירו מערכת מכלים המתאימה לבעיית חלוקת העוגה של המורה (ראו עמוד 6) לפי הכלל היחסי. אל תשכחו לצייר את הצינורות הדקים.

פתרון: באיור 12 מתוארת מערכת מכלים מתאימה, שבה כל יחידת נפח מים מייצגת גרם אחד. נשים לב שכל אחד מהנושים מיוצג באמצעות מכל בעל שטח פנים התואם את דרישתו:



איור 12: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 29.

(ב) פתרו את בעיית חלוקת העוגה של המורה לפי הכלל היחסי.

פתרון: נשתמש במערכת שבנינו בשאלה הקודמת.

שטח הפנים הכולל של שלושת המכלים הוא $1 + 2 + 3 = 6$. לכן מפלס המים במכלים יהיה: $\frac{500}{6} = 83\frac{1}{3}$.
כעת נחשב לכל אחד מהנושים את נפח המים במכל, השווה למפלס המים כפול שטח הפנים של המכל שלו.

- מיטל: $83\frac{1}{3} \cdot 3 = 250$.
- יוני: $83\frac{1}{3} \cdot 2 = 166\frac{2}{3}$.
- יסמין: $83\frac{1}{3} \cdot 1 = 83\frac{1}{3}$.

תרגיל 30: האם לדעתכם הוגן שהנזק של אחד הנושים יהיה גדול מהנזק של נושה אחר?

פתרון: בעולם העסקי, יש מצבים של אפשרות לרווח גדול יותר כאשר מעניקים הלוואה לחברה שתצליח לבסס את מעמדה בשוק. יש שיאמרו שסביר שמי שהשקיע יותר (ועשוי היה להרוויח יותר במקרה של הצלחה) יפסיד יותר במקרה של כישלון.

אם מדובר בהלוואה ללא מטרות רווח בין חברים, נראה שאין זה הוגן שחבר אחד יפסיד יותר מחבר אחר משום שנתן הלוואה גדולה יותר.

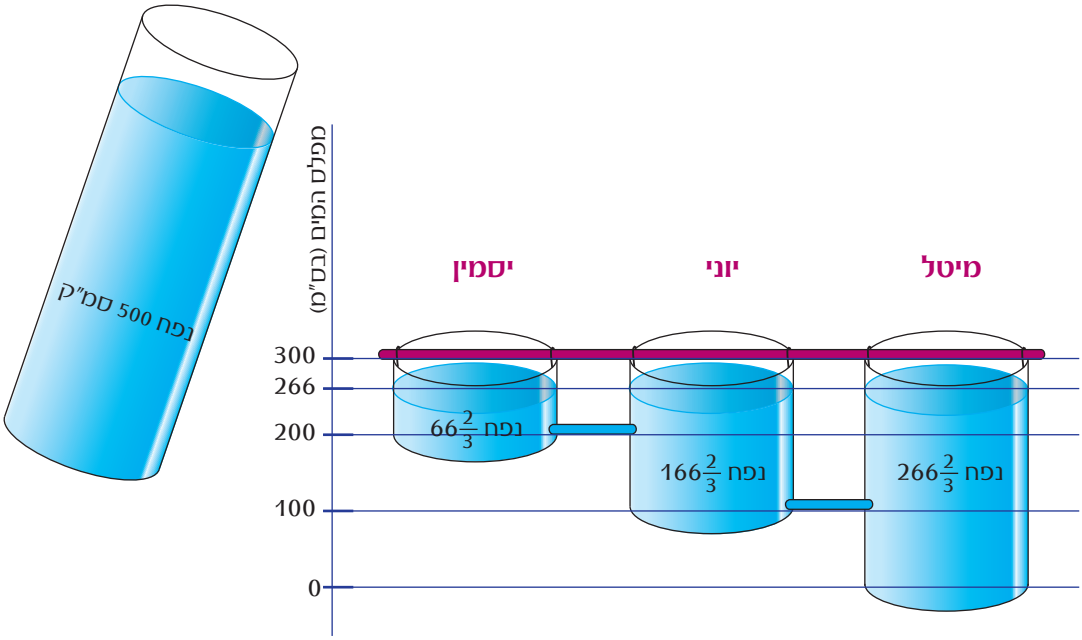
תרגיל 31: בבעיית המסעדה של יואל - מה הנזק הסופי של כל נושה בפתרון שחושב לפי גישת מזעור נזקים?

פתרון: הנזק ליוסי הוא: 15,000 ₪ = 25,000 ₪ - 40,000 ₪;

הנזק לאילן הוא: 15,000 ₪ = 5,000 ₪ - 20,000 ₪.

תרגיל 32: פתרו את בעיית חלוקת העוגה של המורה באמצעות גישת מזעור הנזקים.

פתרון: באיור 13 מתוארת מערכת מכלים מתאימה שבה כל נושה מיוצג באמצעות מכל שגובהו מתאים לדרישה שלו. לכל המכלים שטח פנים של 1 סמ"ר, וכל יחידת נפח שווה ערך לגרם אחד מהעוגה.



איור 13: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 32.

הסבר: תחילה רק המכל של מיטל מתמלא עד שמפלס המים מגיע ל-100 ס"מ (נפח של 100 סמ"ק). לאחר מכן גם המכל של יוני מתמלא עד שמפלס המים מגיע ל-200 ס"מ. בשלב זה מזגנו מהדלי עוד 200 סמ"ק מים, מכיוון ששטח הפנים של הכלים של מיטל ויוני יחד הוא 2 סמ"ר והמפלס עלה ב-100 ס"מ. כעת נותרו בדלי 200 סמ"ק והם מתחלקים שווה בשווה בין שלושת המכלים. מפלס המים במכלים עולה לכן ב- $\frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$.

בסופו של דבר מפלס המים יגיע ל- $266\frac{2}{3}$, וכל אחד מהנושים יקבל פרוסת עוגה שמשקלה יהיה בהתאם לכמות המים במכל שלו, כפי שמופיע באיור.

הנזק של מיטל, יוני ויסמין זהה ושווה ל-$33\frac{1}{3}$ גרם.

תרגיל 33: רשמו אילו מהתכונות מתקיימות בגישת מזעור הנזקים. נמקו את תשובתכם.

(א) "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"

פתרון: התכונה מתקיימת. אם נבחן את מערכת המכלים, נראה שאין אפשרות שנושה יקבל יותר מהדרישה שלו לפני שכל הנושים האחרים מקבלים את מלוא הדרישה שלהם. בבעיות פשיטת רגל הרכוש קטן מסכום הדרישות ולכן מצב זה אינו מתרחש.

(ב) סימטריה

פתרון: התכונה מתקיימת. נושים בעלי אותה דרישה מקבלים אותו סכום במשך תהליך החלוקה. אפשר לראות זאת באמצעות מערכת המכלים: כאשר מפלס המים מתייצב, מכלים בעלי גובה זהה יכילו כמות מים זהה.

(ג) מונוטוניות

פתרון: ככל שלנושה דרישה גדולה יותר, המכל שלו ארוך יותר ולכן תחתיתו נמוכה יותר. מכאן, מים נכנסים למכל המייצג נושה בעל דרישה גבוהה יותר לפני שהם נכנסים למכל של נושה בעל דרישה נמוכה. מכיוון ששטח הפנים של כל המכלים זהה, מרגע שמים מתחילים להיכנס למכל של נושה בעל דרישה נמוכה, אותה כמות מים נכנסת גם למכלים של כל הנושים שדרישתם גבוהה יותר. לכן, נושה שדרישתו נמוכה אינו יכול לקבל יותר מנושה שדרישתו גבוהה.

(ד) התכונה עקביות מתקיימת. הסבירו מדוע.

פתרון: נראה זאת באמצעות מערכת המכלים. אם מפרידים שני מכלים ומשתמשים באותה שיטה של מילוי המכלים במים שהיו בהם, הם יתמלאו בדיוק כמו בבעיה המקורית.

(ה) "יציבות לאיחוד נושים": תכונה זו מתקיימת רק בחלק מהמקרים. מצאו דוגמה שבה התכונה אינה מתקיימת.

פתרון: בבעיית העוגה, יוני ויסמין מקבלים יחד $233\frac{2}{3}$ גרם. אם יתאחדו לנושה אחד הם יקבלו 250 גרם.

הסבר: אם יוני ויסמין מתאחדים, נקבל בעיה שיש בה שני נושים המחזיקים בדרישות זהות:

- יוני ויסמין יחד: דרישה של 300 גרם;
- מיטל: דרישה של 300 גרם.

ראינו שכלל מזעור הנזקים מקיים את התכונה סימטריה, ולכן הפתרון בבעיה החדשה יהיה:

- יוני ויסמין יחד יקבלו 250 גרם;
- מיטל תקבל 250 גרם.

תרגיל 34: א) פתרו את בעיית המסעדה של יואל לפי כלל "שניים אוחזין בטלית". להזכירכם, שווי הרכוש הוא 30,000 ₪, הדרישה של יוסי היא 40,000 ₪ והדרישה של אילן 20,000 ₪.

פתרון: יוסי יקבל 20,000 ₪ ואילן יקבל 10,000 ₪.

ב) כלל "שניים אוחזין בטלית" והכלל היחסי מביאים לפתרונות זהים בבעיית המסעדה של יואל (ראו עמוד 28). האם בכל בעיה של שני נושים נקבל פתרונות זהים בשני כללים אלה? אם כן, נמקו. אם לא, מצאו דוגמה שבה שני הכללים אינם מוליכים לפתרונות זהים.

פתרון: יש בעיות שבהן נקבל פתרונות שונים לפי הכלל היחסי ולפי כלל "שניים אוחזין בטלית". נבחן את הבעיה שבה אביאל וברק הם הנושים היחידים, הרכוש לחלוקה הוא 5 ₪, הדרישה של אביאל היא 6 ₪ והדרישה של ברק היא 2 ₪.

- לפי הכלל היחסי אביאל יקבל 3.75 ₪ וברק יקבל 1.25 ₪: סכום הדרישות הוא 8 ₪, הרכוש הוא 5 ₪, ולכן כל נושה יקבל 5/8 מהדרישה שלו. לכן אביאל יקבל חמש שמיניות מ-6 ₪ שהן 3.75 ₪, וברק יקבל חמש שמיניות מ-2 ₪, שהן 1.25 ₪.
- לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" אביאל יקבל 4 ₪ וברק יקבל 1 ₪: אביאל טוען שכל הרכוש שייך לו, ואילו ברק טוען שהחלק שלו שווה 2 ₪, כלומר הוא מודה ש-3 ₪ שייכים לאביאל. החלק ברכוש שעליו שני הנושים טוענים בעלות, שהוא 2 ₪, יחולק שווה בשווה בין שניהם. לכן אביאל יקבל 4 ₪ וברק יקבל 1 ₪.

תרגיל 35: בבעיית דמי הכיס של רם ושל יותם יש לחלק רכוש של 100 ₪ בין רם, שדרישתו 80 ₪, לבין יותם, שדרישתו 50 ₪. פתרו את הבעיה לפי כללי החלוקה שבטבלה והשוו בין הפתרונות באמצעות הטבלה.

כלל		שוויוני	יחסי	מזעור נזקים	שניים אוחזין בטלית
תשלום	רם	50	61.5	65	65
	יותם	50	39.5	35	35

תרגיל 36: פתרו לפי כלל "שניים אוחזין בטלית" את בעיית פשיטת הרגל שבה יש לחלק רכוש של 80 ₪ בין רם, שדרישתו 60 ₪, לבין יותם, שדרישתו 40 ₪. האם הפתרון מתאים לפתרון המתקבל באמצעות מערכת המכלים הדומה למערכת שבאיור 6?

פתרון: בבעיה המתוארת, כלל "שניים אוחזין בטלית" יביא לחלוקה זאת:

- רם יקבל 50 ₪;
- יותם יקבל 30 ₪.

נגדיר שכל יחידת נפח שוות ערך ל-10 ₪, ונקבל שמערכת המכלים המתוארת באיור 6 מתאימה לבעיה ומובילה לפתרון זהה לפתרון שחושב לפי "כלל שניים אוחזין בטלית". הסבר:

- המכלים המתאימים לרם הם המכלים שמעל הכיתוב "נושה 1", המכילים יחד 5 סמ"ק מים.
- המכלים המתאימים ליותם הם המכלים שמעל הכיתוב "נושה 2", המכילים יחד 3 סמ"ק מים.

תרגיל 37: רשמו אילו מהתכונות מקיים כלל "שניים אוחזין בטלית". נמקו את תשובתכם.

בפתרון נניח שהנושים בבעיה הנתונה הם אביאל וברק.

(א) "נושה אינו מקבל יותר מהדרישה שלו"

פתרון: התכונה מתקיימת. מהתבוננות במערכת המכלים עולה שאביאל אינו יכול לקבל את מלוא דרישתו כל עוד ברק לא קיבל את מלוא דרישתו. מכיון שמדובר בבעיית פשיטת רגל, הרכוש קטן מסכום הדרישות של אביאל ושל ברק, ולכן אין אפשרות ששניהם יקבלו את מלוא דרישתם. לכן אביאל אינו מקבל יותר מהדרישה שלו. באותו אופן אפשר להראות שגם ברק אינו מקבל יותר מהדרישה שלו.

(ב) סימטריה

פתרון: התכונה מתקיימת. אם לאביאל ולברק יש אותה דרישה, המכלים של שניהם יהיו זהים, ולכן לאחר מזיגת המים מהדלי יכילו המכלים של שניהם כמות מים זהה. לכן בחלוקת הרכוש יקבלו אביאל וברק סכומים זהים.

(ג) מונוטוניות

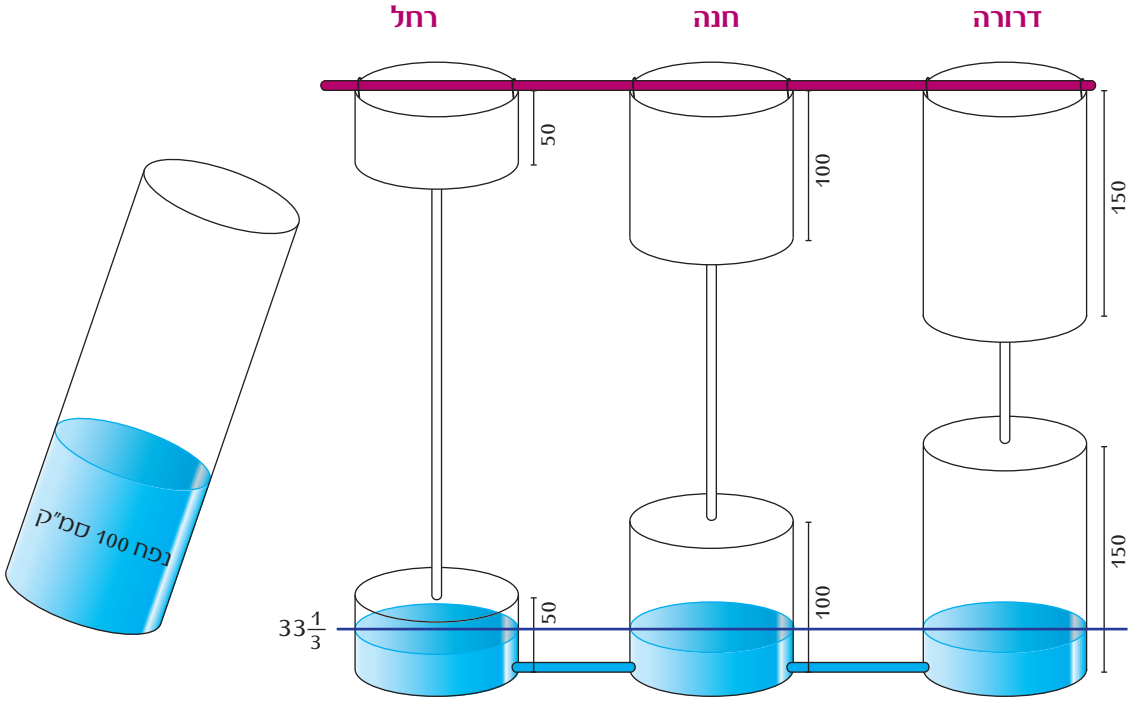
פתרון: התכונה מתקיימת. נבחן מקרים אלה:

- אם דרישתו של אביאל גדולה יותר מזו של ברק, המכלים שמייצגים את אביאל יהיו גבוהים יותר. מכאן, המכל התחתון המייצג את אביאל יתמלא בכמות מים שאינה קטנה מזו שבמכל התחתון של ברק. כמו כן, המכל העליון של אביאל יתחיל להתמלא במים לפני המכל העליון של ברק מכיוון שהתחתית שלו נמוכה יותר. לכן אביאל לא יקבל פחות מברק.
- אם דרישתו של ברק גדולה מהדרישה של אביאל, ברק לא יקבל פחות מאביאל מאותה סיבה שהראינו במקרה הקודם.
- אם לאביאל ולברק דרישות שוות, הם יקבלו את אותו סכום מכיוון שהראינו בסעיף ב שכלל החלוקה מקיים סימטריה.

תרגיל 38: ציירו מערכת מכלים המתאימה לבעיית הירושה של רחל, חנה ודבורה (ראו עמוד 7), לפי כלל החלוקה של רבי נתן. השתמשו במערכת המכלים כדי לפתור את הבעיה בשלושת המקרים שבהם העיזבון הוא 100 דינר, 200 דינר, 300 דינר.

(א) עיזבון של 100 דינר

פתרון: באיור 13 מתוארת מערכת מכלים מתאימה, שבה כל יחידת נפח מים שוות ערך לדינר אחד. לכל המכלים שטח פנים של 1 סמ"ר.



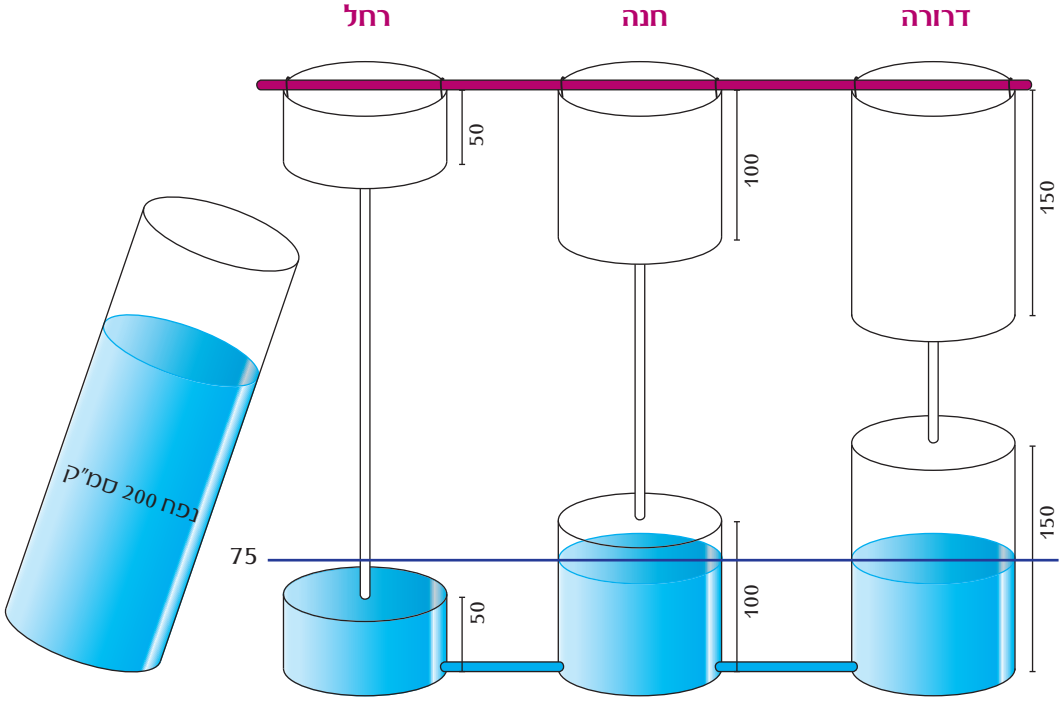
איור 14: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 38 סעיף א'.

הסבר: שטח הפנים הכולל של שלושת המכלים הוא 3 = 1 + 1 + 1. לכן מפלס המים במכלים יהיה $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$.

מכאן - כל אחת מהנשים תקבל $33\frac{1}{3}$ דינר.

(ב) עיזבון של 200 דינר

פתרון: באיור 15 מתוארת מערכת מכלים זהה לזו שבאיור 14, אלא שכעת נפח המים בדלי הגדול טרם המזיגה הוא 200 סמ"ק. מערכת מכלים זו מתאימה לפתרון בעיית הירושה כאשר העיזבון הוא 200 דינר.



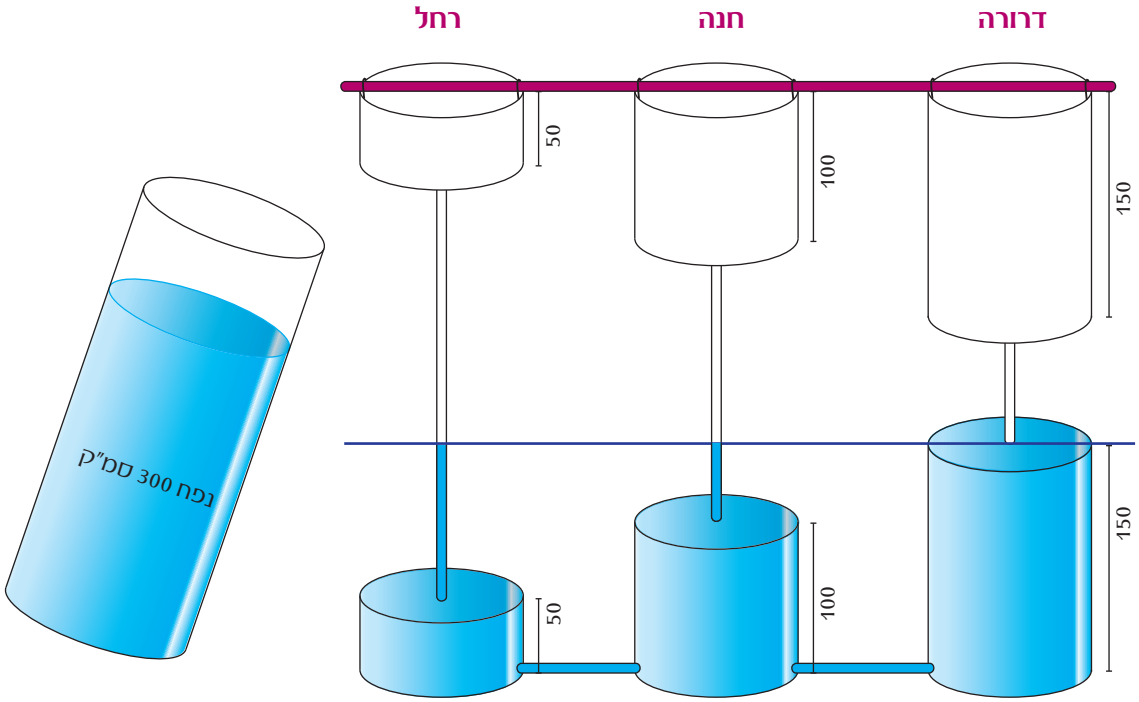
איור 15: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 38 סעיף ב'.

הסבר: עד מפלס של 50 ס"מ מתחלקים 150 סמ"ק מים שווה בשווה בין שלושת המכלים. 50 סמ"ק נוספים מתחלקים בין המכלים של חנה ושל דבורה בלבד, ולכן המפלס במכלים שלהן עולה ב- $\frac{50}{2} = 25$ ס"מ נוספים. לכן מפלס המים במכלים של דבורה ושל חנה יהיה 75 והחלוקה הסופית תהיה:

- רחל - 50 דינר
- חנה - 75 דינר
- דבורה - 75 דינר

(ג) עיזבון של 300 דינר

פתרון: באיור 16 מתוארת מערכת מכלים זהה לזו שבאיור 15, אלא שכעת נפח המים בדלי הגדול טרם המזיגה הוא 300 סמ"ק. מערכת מכלים זו מתאימה לפתרון בעיית הירושה כאשר העיזבון הוא 300 דינר.



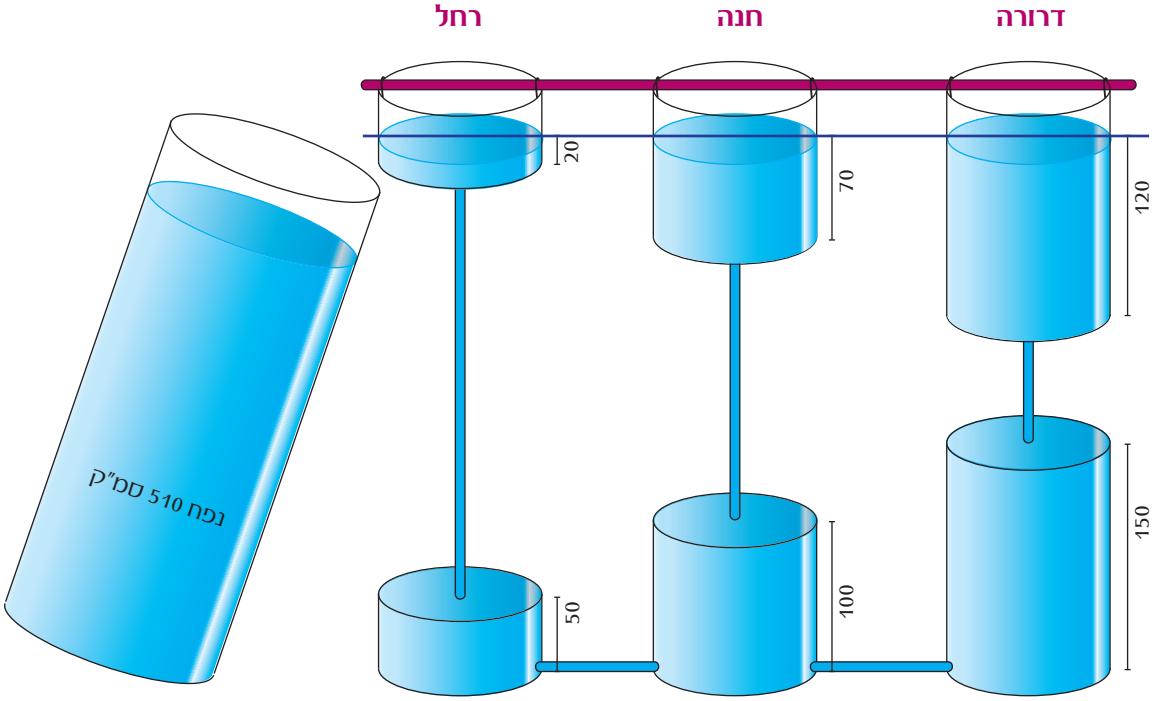
איור 16: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 38 סעיף ג'.

הסבר: עד מפלס של 50 ס"מ מתחלקים 150 סמ"ק מים בין שלושת המכלים שווה בשווה. עד מפלס של 100 ס"מ, מתחלקים 100 סמ"ק נוספים בין חנה לדבורה. הנוזל הנותר, שנפחו 50 סמ"ק, מעלה את המפלס במכל של דבורה בלבד. לכן מפלס המים במכל של דבורה יגיע ל-150 ס"מ, והחלוקה הסופית תהיה:

- רחל - 50 דינר
- חנה - 100 דינר
- דבורה - 150 דינר

תרגיל 39: מצאו את הפתרון לבעיית הירושה של רחל, חנה ודבורה לפי כלל רבי נתן במקרה שבו העיזבון הוא 510 דינר.

פתרון: באיור 17 מתוארת מערכת מכלים זהה לזו שבאיור 16, אלא שכעת נפח המים בדלי הגדול טרם המזיגה הוא 510 סמ"ק. מערכת מכלים זו מתאימה לפתרון בעיית הירושה כאשר העיזבון הוא 510 דינר.



איור 17: מערכת המכלים המתאימה לתרגיל 39.

הסבר: כפי שראינו בתרגיל הקודם, מזיגה של 300 סמ"ק מובילה למילוי שלושת המכלים התחתונים. מזיגה של 50 סמ"ק נוספים תוביל לעלייה של 50 ס"מ במפלס המים במכל העליון של דבורה. מזיגה של 100 סמ"ק נוספים (450 בסך הכול) תוביל לעלייה של 50 סמ"ק במפלס המים במכלים העליונים של דבורה ושל חנה. 60 הסמ"ק הנותרים יתחלקו בין שלושת המכלים ויובילו לעלייה של 20 ס"מ בשלושת המכלים העליונים.

כתוצאה מכך, המכל העליון של דבורה יכיל נוזל שנפחו 120 סמ"ק, המכל העליון של חנה יכיל נוזל שנפחו 70 סמ"ק, והמכל העליון של רחל יכיל נוזל שנפחו 20 סמ"ק.

כל אישה תקבל סכום המתאים לכמות המים שבשני המכלים המייצגים אותה. כמות זו שווה לקיבולת המכל התחתון המלא בתוספת המים שבמכל העליון. הפתרון המתקבל:

- דבורה - 270 דינר
- חנה - 170 דינר
- רחל - 70 דינר

תרגיל 40: הראו באמצעות דוגמה, שכלל רבי נתן אינו מקיים את התכונה "יציבות לאיחוד נושים".

פתרון: נבחן את בעיית הירושה של דבורה, חנה ורחל כאשר העיזבון הוא 60 דינר. פתרון על פי כלל רבי נתן יביא לחלוקה של 20 דינר לכל אחת מהנשים. בפרט, חנה ורחל מקבלות יחד 40 דינר.

אם נפתור לפי אותו כלל את הבעיה שבה יש שני נושים בעלי דרישות אלה:

- דבורה - 300 דינר
- חנה ורחל יחד - 300 דינר

נקבל שהפתרון מעניק 30 דינר לדבורה ו-30 דינר לחנה ורחל יחד, ולכן חנה ורחל מקבלות בבעיה החדשה פחות מהסכום שקיבלו יחד בפתרון הבעיה המקורית.

7. לקריאה נוספת

פרקים בתורת המשחקים, עין-יה גורה ומיכאל משלר. המרכז להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית בירושלים.

חוברות "כדאי לדעת" מציגות מגוון נושאים אקדמיים וסוגיות מתקדמות בשפה שווה לכל נפש. מטרתן לחשוף את הקוראים לתחומים חדשים ולאתגר את חשיבתם.

חוברת זו עוסקת בבעיות פשיטות רגל מנקודת מבטה של תורת המשחקים: מהי בעיית פשיטת רגל, מהו כלל חלוקה, מתי כלל חלוקה הוא הוגן וכיצד אפשר לממש כללי חלוקה בעזרת מערכות של מכלים.

אוניברסיטת תל אביב **לנוער**

בית הספר למדעי המתמטיקה,
הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

goodtoknow.tau.ac.il