



# מבחן B

משך המבחן שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון / חומר עזר.  
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. פתרו את המשוואה הבאה במספרים ממשיים:  $\frac{\sin x + \sin 3x}{2} = \sin 2x$

2. האם המספר  $(2^2 - 1) \cdot (3^2 - 1) \cdot (4^2 - 1) \cdot \dots \cdot (300^2 - 1)$  מתחלק ב- $7^{95}$ ? האם הוא מתחלק ב- $7^{100}$ ?

3. במשולש ישר זווית  $ABC$  אורכי כל הצלעות הם מספרים שלמים. הוכיחו כי רדיוס של המעגל החסום ב- $ABC$  הוא גם מספר שלם.

4. הוכיחו כי האי-שוויון  $\sin x + \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{4} + \dots + \sin \frac{x}{2^n} < 2x$  מתקיים לכל  $n$  טבעי ו- $x > 0$  ממשי.

5. פתרו את מערכת המשוואות הבאה (במספרים ממשיים חיוביים):

$$\begin{cases} \log_7(xy) = 3 \\ \log_x(7y) = 7 \end{cases}$$

6. נתון משולש  $ABC$  וישר  $l$  שאינו חותך את המשולש.  $K, L, M$  הן נקודות חיתוך של  $l$  עם הישרים  $BC, AC, AB$  בהתאמה. נתון כי  $CB = BK$ , וכי  $AB = 2 \cdot BM$ .

מצאו את  $\frac{AC}{CL}$ .

7. במרובע  $ABCD$  נתונות זוויות  $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ,  $\angle C = 135^\circ$ . בנוסף נתון כי  $AB = BC$ . הוכיחו כי האלכסון  $AC$  מחלק את המרובע לשני חלקים שווי שטח.

8. הוכיחו כי  $\sin \frac{\pi}{20} + \cos \frac{\pi}{20} + \sin \frac{3\pi}{20} - \cos \frac{3\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

9. הוכיחו כי לכל  $x > 1$  מתקיים  $\log_2 x + \log_3 x + \log_5 x > 9 \cdot \log_{30} x$ .

**בהצלחה!**