

פתרונות מבחן C - 17.2.2025

1. עבור איזה k חיובי שלם המספר $\binom{1001}{k} \cdot 3^k$ יהיה הכי גדול?

תשובה. 751

פתרון. נסמן $a_k = \binom{1001}{k} \cdot 3^k$. נבדוק מתי מתקיים $a_k < a_{k+1}$. באופן שקול

$$\binom{1001}{k} \cdot 3^k < \binom{1001}{k+1} \cdot 3^{k+1}$$

$$\frac{1001!}{k! \cdot (1001-k)!} < \frac{1001!}{(k+1)! \cdot (1000-k)!} \cdot 3$$

$$k+1 < (1001-k) \cdot 3$$

$$4k < 3003$$

$$k < 750\frac{3}{4}$$

נשים לב כי כהופכים את אי-השוויון $a_k > a_{k+1}$ נקבל הופכים גם כל אי-שוויון אחר שכתבנו ומקבלים $k > 750\frac{3}{4}$. מכאן

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{749} < a_{750} < a_{751} > a_{752} > a_{753} > \dots > a_{1001}$$

מכאן רואים ש- a_{751} הוא הכי גדול.

2. מצאו את המספר הממשי הקטן ביותר m עבורו $x^8 - x^6 + m \geq 0$ לכל x ממשי.

תשובה. $\frac{27}{256}$.

פתרון ראשון. נגדיר פונקציה $f(x) = x^8 - x^6$. אם נצליח למצוא את הערך הקטן ביותר של הפונקציה, נוכל להגיד שזה $-m$. הפונקציה זוגית, כלומר $f(x) = f(-x)$, כלומר כל הערכים מתקבלים בתחום $x \geq 0$, ומספיק לחקור את התנהגות הפונקציה בתחום זה.

$$f'(x) = 8x^7 - 6x^5 = x^5 \cdot 8 \cdot \left(x^2 - \frac{3}{4}\right)$$

נשים לב כי עבור $x = \sqrt{\frac{3}{4}}$ הנגזרת מתאפסת; אם זאת בתחום $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ הנגזרת שלילית, ובתחום $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ הנגזרת חיובית. לכן בתחום $0 < x < \sqrt{\frac{3}{4}}$ הפונקציה יורדת ובתחום $x > \sqrt{\frac{3}{4}}$ הפונקציה עולה; לכן המינימום מתקבל עבור $x = \sqrt{\frac{3}{4}}$, והערך המינימלי

$$-m = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4} - 1\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{27}{256}$$

$$.m = \frac{27}{256} \text{ ובכן}$$

פתרון שני. נשתמש באי-שוויון בממוצעים: ממוצע חשבוני גדול או שווה לממוצע הנדסי.

$$\frac{\frac{1}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^8 + \frac{3^3}{4^4}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{3}x^8 \cdot \frac{1}{3}x^8 \cdot \frac{1}{3}x^8 \cdot \frac{3^3}{4^4}} = \frac{x^6}{4}$$

$$x^8 + \frac{3^3}{4^4} \geq x^6$$

ובכן $x^8 - x^6 + \frac{3^3}{4^4} \geq 0$. אי אפשר להחליף את $\frac{3^3}{4^4}$ במספר קטן יותר, כי באי-שוויון

הממוצעים שהסתמכנו עליו יכול לקרות שוויון גם כאשר $\frac{1}{3}x^8 = \frac{3^3}{4^4}$ והרי x כזה קיים.

3. מה יותר גדול: $103^{103} \cdot 98^{98} \cdot 99^{99}$ או 10^{600} ?

תשובה. $103^{103} \cdot 98^{98} \cdot 99^{99}$ יותר גדול.

פתרון. נחלק את שני המספרים ב- 100^{300} , ונקבל השוואה בין $\frac{103^{103}}{100} \cdot \frac{98^{98}}{100} \cdot \frac{99^{99}}{100}$

לבין 1. נוציא שורש מסדר 100, ונקבל השוואה בין $\frac{103^{\frac{103}{100}}}{100} \cdot \frac{98^{\frac{98}{100}}}{100} \cdot \frac{99^{\frac{99}{100}}}{100}$ לבין 1.

ניקח $\ln$ לשני המספרים. אם נסמן $f(x) = x \ln x$ נקבל השוואה בין

$$.0 = 3 \cdot f(1) \text{ לבין } f\left(\frac{103}{100}\right) + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)$$

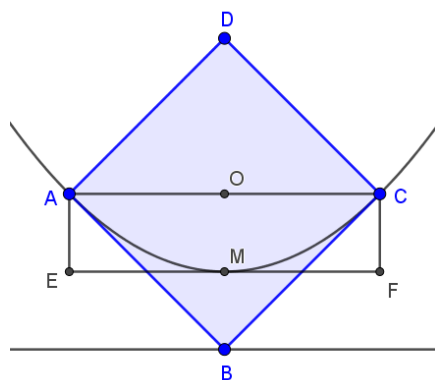
נבדוק האם f היא פונקציה קמורה או קעורה. $f'(x) = (x \ln x)' = \ln x + 1$ וזו פונקציה עולה, לכן f קמורה. בפרט

$$0 = f(1) = f\left(\frac{300}{300}\right) = f\left(\frac{\frac{103}{100} + \frac{98}{100} + \frac{99}{100}}{3}\right) \leq \frac{f\left(\frac{103}{100}\right) + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)}{3}$$

כלומר $0 = 3 \cdot f(1) \leq f\left(\frac{103}{100}\right) + f\left(\frac{98}{100}\right) + f\left(\frac{99}{100}\right)$ לבין $0 = 3f(0)$.

לכן גם $103^{103} \cdot 98^{98} \cdot 99^{99}$ גדול מ- 10^{600} .

4. נתון ריבוע ABCD ששטחו 1. מרכז הריבוע הוא O. פרבולה עם מוקד בנקודה O עוברת בנקודות A ו-C ומחלקת את הריבוע ABCD לשני חלקים; מצאו את השטחים של שני החלקים.



תשובה. השטחים הם $\frac{1}{6}$ ו- $\frac{5}{6}$.

פתרון. מרחק מהנקודות A ו-C ל-O שווה למחצית האלכסון של הריבוע; לכן כזה גם המרחק מ-A ומ-C למדרון. לכן המדרון הוא מקביל ל-AC ועובר דרך B או D, ניתן להניח לה"כ שהמדרון עובר דרך B כי שני המקרים סימטריים.

נשים לב כי כל הנקודות של הישרים BC ו-AB נמצאות באותו מרחק מהמדרון כמו מהישר OB, לכן הנקודות על הצלעות AB ו-BC קרובות יותר למדרון ולכן הפרבולה לא פוגשת את הצלעות הריבוע חוץ מאשר בנקודות A ו-C.

תהיה M נקודת האמצע של OB, היא נמצאת באותו מרחק מ-O ומהמדרון ולכן גם היא על הפרבולה. נעביר משיק לפרבולה ב-B, ונוריד עליו אנכים מנקודות A ו-C שיפגשו את המדרון בנקודות E ו-F בהתאמה. שטחי המשולש ABC והמלבן CAEF זהים, כי יש להם אותו בסיס AC, ואומנם גובה OB פי 2 יותר גדול מגובה המלבן, אבל בנוסחה לשטח המשולש מחלקים ב-2 להבדיל מנוסחת שטח המלבן. לכן על מנת להבין באיזה יחס הפרבולה הנתונה מחלקת את המשולש ABC מספיק להבין באיזה יחס היא מחלקת את המלבן CAEF, הרי גם החלק בין הפרבולה ל-AC הוא משותף בשני המקרים.

הפרבולה מחלקת את המלבן ביחס 1:2, כלומר שליש מהמלבן הוא בצד של EF יחסית לפרבולה, ושני שליש בצד של AC, כי כאשר עושים אינטגרל של x^2 יש מקדם $\frac{1}{3}$ בפונקציה קדומה. לכן כשפרבולה מחלקת את השטח של ABC, אז בצד של B השטח הוא $\frac{1}{3}$ מהמשולש, וזה $\frac{1}{6}$ מהריבוע ABCD.

5. מצאו את כל המספרים המרוכבים שמקיימים את המשוואה:

$$1 - z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + z^6 - z^7 = 0.$$

תשובה. $\pm 1, \pm i$

פתרון. נשים לב כי

$$\begin{aligned} 1 - z - z^2 + z^3 - z^4 + z^5 + z^6 - z^7 &= \\ &= (1 - z) - z^2(1 - z) - z^4(1 - z) + z^6(1 - z) = \\ &= (1 - z)(1 - z^2 - z^4 + z^6) = (1 - z)((1 - z^2) - z^4(1 - z^2)) = \\ &= (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^4) = (1 - z)(1 - z^2)(1 - z^2)(1 + z^2) \end{aligned}$$

על מנת שהמכפלה תתאפס, צריך שאחד הגורמים יתאפס. הגורם הראשון מתאפס כאשר $z = 1$, שני גורמים נוספים מתאפסים כאשר $z = \pm 1$, הגורם האחרון מתאפס כאשר $z = \pm i$.

6. נתבונן בקבוצת כל הנקודות (x, y) במישור המקיימות $0 \leq \frac{2x}{\pi} \leq y \leq \sin x$.

מהו השטח של הקבוצה?

תשובה. $1 - \frac{\pi}{4}$.

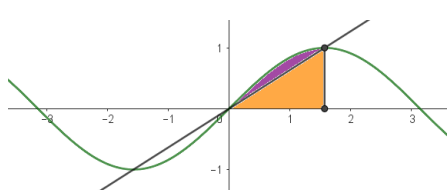
פתרון. החלק הרלוונטי נמצא ב- $0 \leq x$ כי זה אי-השוויון השמאלי. מצד שני $\sin \leq 1$ לכן

$$\frac{2x}{\pi} \leq 1, \text{ כלומר } x \leq \frac{\pi}{2}. \text{ ובכן } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

בקצוות הקטע הנקודות $(0, 0)$ ו- $(\frac{\pi}{2}, 1)$ נמצאות גם על הקו $y = \frac{2x}{\pi}$ וגם על $y = \sin x$.

. בתוך הקטע $\sin$ היא קמורה, לכן היא נמצאת מתחת לקו ישר.

אפשר לקבל את השטח כשמשבים את השטח מתחת לגרף של $\sin$ ומחסירים את המשולש



שקודקודיו הן $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$, עם גובה 1

ובסיס $\frac{\pi}{2}$, כלומר שטח המשולש (כתום בציור) שווה

$$\text{ל- } \frac{\pi}{4}. \text{ שטח מתחת לגרף של סינוס הוא } \int_0^{\pi/2} \sin x \cdot dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

לכן השטח שצריך לחשב (סגול בציור) הוא $1 - \frac{\pi}{4}$.

7. מספר נקרא נפלא אם הוא מקיים את כל התכונות הבאות:

- המספר הוא 10-ספרתי,
- כל ספרה שווה ל-2 או ל-3 (לא בהכרח כל הספרות זהות),
- בסמוך לכל ספרה יש ספרה ששווה לה.

למשל 2233332332 או 2332223322 הם לא נפלאים. כמה מספרים נפלאים יש?

תשובה. 68

פתרון. נסמן את מספר המספרים הנפלאים ה- k -ספרתיים ב- n_k . נשים לב כי $n_1 = 0$ כי מספר חד-ספרתי אינו נפלא (ליד ספרה יחידה שלו אין עוד ספרה כזאת); וגם $n_2 = 2$.

נתבונן במספר נפלא. אם הוא מסתיים ברצף של 3 או יותר ספרות זהות, ניתן למחוק את הספרה האחרונה ולקבל מספר נפלא; מצד שני לכל מספר נפלא $k-1$ -ספרתי ניתן להוסיף לסופו את ספרתו האחרונה ולקבל מספר נפלא מסוג זה בדרך יחידה. אם מספר נפלא k -ספרתי מסתיים ברצף של שתי ספרות זהות, והספרה השלישית מהסוף היא שונה, ניתן למחוק את שתי הספרות האחרונות ולקבל מספר נפלא; מצד שני לכל מספר $k-2$ -ספרתי אפשר להוסיף לסופו שתי ספרות ששונות מספרה האחרונה ולקבל מספר נפלא בדרך יחידה.

לכן החל מ- $k=3$ מתקיימת נוסחת נסיגה: $n_k = n_{k-1} + n_{k-2}$, ולכן:

$$\begin{aligned} n_1 &= 0, & n_2 &= 2, & n_3 &= 2, & n_4 &= 4, & n_5 &= 6, \\ n_6 &= 10, & n_7 &= 16, & n_8 &= 26, & n_9 &= 42, & n_{10} &= 68. \end{aligned}$$

בעצם המספרים שמתקבלים גדולים פי 2 ממספרי פיבונצ'י.

8. במרחב נתונים קוביה ומישור. עבור 5 קודקודים של הקוביה, המרחקים למישור הנתון הם מספרים שלמים. האם בהכרח המרחקים מהמישור הנתון ל-3 הקודקודים האחרים של הקוביה הם מספרים שלמים?

תשובה. כן.

פתרון. נבחר מערכת צירים בה שני הצירים x ו- y מוכלים במישור הנתון. אז לכל נקודה, ערך מוחלט של הקואורדינטה השלישית הוא המרחק למישור הנתון. עבור 5 מהקודקודים, הקואורדינטה השלישית היא שלמה.

נקרא ל-5 קודקודים שיש להם קואורדינטת z שלמה **קודקודים מסומנים**.

לקוביה יש מקצועות (צלעות) ב-3 כיוונים, ובכל כיוון יש 4 מקצועות שמחברות 2 קודקודים. נניח כי יש 3 ווקטורים של מקצועות בכיוונים שונים: u, v, w . נבחר כיוון מסוים, נגיד של ווקטור u . מבין 5 קודקודים מסומנים יש שני קודקודים על אותו מקצוע בכיוון של u . לכן u הוא הפרש של שתי נקודות עם קואורדינטת z שלמה, ולכן גם ל- u יש קואורדינטת z שלמה. אותו דבר מתקיים ל- v וגם ל- w .

אפשר להתחיל קודקוד מסומן, ולעבור לכל קודקוד אחר כאשר מוסיפים או מחסירים כל פעם וקטורים מבין u, v, w , לכן יש קואורדינטת z שלמה לכל הקודקודים.

