



מבחן B

משך המבחן שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון / חומר עזר.
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. נניח כי n מספר אי-זוגי. הוכיחו כי $n^3 - n$ מתחלק ב-24.

2. בהינתן ש- $\tan x = 2 - \sqrt{3}$, חשבו את $\cos(2x)$.

3. פתרו את המשוואה

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)} = 0.8$$

4. מעגל שמרכזו O חסום במרובע ABCD. הראו כי $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$.

5. פתרו את המשוואה $\log_2(1 - \sin x) + \log_2(1 + \sin x) + 1 = 0$.



6. עוגה עגולה נחתכה ל-6 חלקים שווים על ידי קווים ישרים שעוברים דרך המרכז. חתיכת העוגה מונחת על פני צלחת עגולה, כך ששלוש הפינות של חתיכת העוגה נמצאות בדיוק על קצה הצלחת (כמו ציור). כמה אחוזים משטח הצלחת מכוסים על ידי העוגה?

7. מצאו והוכיחו נוסחה מקוצרת עבור הסכום הארוך

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \dots + (2n-1)^2$$

8. האם $\frac{\sin(59^\circ) + \sin(61^\circ)}{\cos(59^\circ) + \cos(61^\circ)}$ הוא מספר רציונאלי?

9. הראו שלכל $x, y > 1$ מתקיים אי-שוויון

$$\log_2 x + \log_x y + \log_y 8 \geq \sqrt[3]{81}$$

האם יכול להתקיים שוויון באי-שוויון זה?

בהצלחה!