



# מבחן B

משך המבחן שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון / חומר עזר.  
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. פתרו את המשוואה  $\log_7(x^2 + x + 1) + \log_7(x - 1) = 1$ .

2. הוכיחו כי  $(\cos x + \cos(3x)) \cdot \sin(2x) = (\sin x + \sin(3x)) \cdot \cos 2x$ .

3. במשולש ABC שכל זוויותיו חדות העבירו את הגבהים AD, BE, CF. עקבי האנכים A-ומ-B לישר DE יסומנו P ו-Q בהתאמה. הוכיחו כי PE שווה ל-DQ.

4. נתונה סדרה של מספרים:  $a_0 = 0, a_1 = 1$ , ולכל  $n \geq 2$  מתקיים  $a_{n+2} = a_n + 5a_{n+1}$ .

הוכיחו כי לכל  $n$  מתקיימת הזהות:  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{a_n a_{n+1}}{5}$ .

5. בהינתן  $\cos x = \frac{1}{2}$ , חשבו את  $\tan \frac{x}{2}$ .

6. במרובע חסום ABCD האלכסונים AC, BD נפגשים בנקודה X. נסמן את אורכי הצלעות  $a = AB, b = BC, c = CD, d = DA$ . נתון כי  $\angle AXB = 60^\circ$ . הוכיחו כי

$$a^2 + ac + c^2 = b^2 - bd + d^2$$

7. הראו שלכל שני מספרים ממשיים  $a$  ו- $b$ , מתקיים אי-שוויון  $a^4 + b^4 + 1 \geq a + b$ .

8. נקודות K, L, M, N הם אמצעי הצלעות AB, BC, CD, DA בהתאמה של מרובע ABCD. הוכיחו כי  $CK^2 + DL^2 + AM^2 + BN^2 = DK^2 + AL^2 + BM^2 + CN^2$ .

**בהצלחה!**