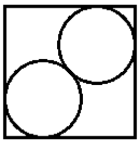
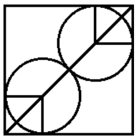
פתרון למבחן A (שנערך ב-29.9.2014).



1. الدائرتين الظاهرتين في الصوره متساويتين, متماسّتبين مع بعضهما البعض ومماسات لأضلاع المربع, حيث أن كل دائره مماسة لضلعين بالضبط. جد طول نصف القطر للدائرتين, مع المعطى أن طول ضلع المربع هو 1.



حلّ. نمرر قطر بداخل المربع يمر عبر مركزيّ الدائرتين. كذلك, ننزل معامدين من كل مركز للضلعين القريبين إليه. نرمز بـr لانصاف اقطار الدائرتين. يقسم القطر لأقسام, القسم الذي يصل بين المركزين هو بطول $2r$, والقسمين الباقيين هما قطرين بمربعين اصغر,حيث اضلاعهما مساويهلانصاف اقطار الدائرتين. لذلك القسمين الباقيين همابأطوال $\sqrt{2}\cdot r$حسب نظرية فيتاغوروس . قطر المربع الكبير هو $\sqrt{2}$.لذلك نحصل على المتباينه:

$$2r + 2\sqrt{2}r = \sqrt{2}$$

وينبع مذلك $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$.وهذه هي الاجابة, لكن يمكن تبسيطها بأن نصرب المقام والبسط بـ $\sqrt{2}-1$, وبذلك نحصل على $r = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. معطى ارقام حقيقيه x, yتحقق $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 20y + 9 = 0$. جدوا $x + 2y$.

حل. نرمز $z = x + 2y$. اذاً $z^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$,وبذلك بالواقع المعطى هو

$$z^2 + 10z + 9 = 0$$

ويجب ان نجد قيمة z. نضيف 16 لطرفي المعادله ; إذا بالطرف اليسار ينتج تربيع:

$$z^2 + 10z + 25 = 16$$

$$(z+5)^2 = 16$$

$$z + 5 = \pm 3$$

$$z = 5 \pm 3 .$$

بذلك, يوجد إجابتين : 2 ו-8.

3. يوجد في الحديقة N مقاعد, وعلى كل مقعد يجلس شخص. على 7 من المقاعد يجلس فقط شخص واحد فقط. يوجد مقعد يجلس عليه شخصين. ومقعد يجلس عليه 3 اشخاص, لا يوجد اي مقعد يجلس عليه اكثر من 3 اشخاص. مجموع الاشخاص اللذين يجلسون على المقاعد هو 19. جد N.

حل. نفرض انه يوجد B مقاعد يجلس عليها اثنين, ويوجد C مقاعد يجلس عليها 3 اشخاص . إذاً $N = 7 + B + C$ (حيث على كل مقعد يجلس 1, 2 أو 3 أشخاص), والمجموع الكلّي

$$19 = 7 + 2B + 3C$$

إذاً

$$12 = 2B + 3C$$

معطى أنه ايضاً- $B \geq 1$ وأيضاً $C \geq 1$. لذلك

$$3B + 3C > 12 > 2B + 2C$$

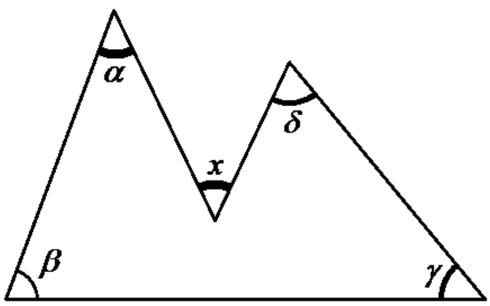
وينبع انه $6 > B + C$ من ناحيه ثانيه $B + C > 4$. لذلك $B + C = 5$, وإذاً

$$N = 7 + B + C = 7 + 5 = 12$$

وهو المطلوب.

4. معطى اعداد طبيعية a,b,c. حيث ان ثلاثة الاعداد ab+cd, ac+b, ad+bc هي فرديّة. هل العدد a+b+c+d زوجي ام فردي؟

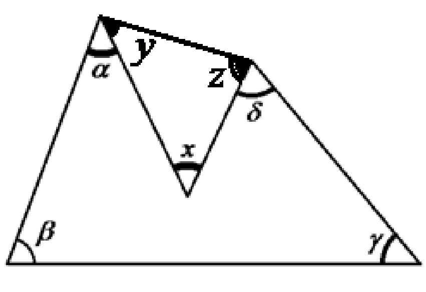
حلّ. واحد من بين الاعداد ab و- cd زوجي والاخر فردي. العدد الفردي هو ناتج ضرب عددين فرديين. إذاً من بين 4الأعداد المعطاه a,b,c,d يوجد اثنين فرديين, لكن يوجد ايضاً رقم زوجي لانه يوجد ناتج ضرب زوجي. يمكن ان ندّعي أن a,b هما الاثنين فرديين, أو انّ c,d هما الاثنين فرديين. لو كان يجد بالإضافه عددين زوجيين إذاً $ac + bd$ زوجي على عكس المعطى,حيث بكل واحد من الأرقام المشتركه بالجمع يوجد عامل زوجي. هذا غير ممكن, لذلك بين الاعداد المعطاه a,b,c,d يوجد 3 أعداد فرديه وعدد واحد فردي.لذلك $a + b + c + d$ زوجي.



5. تمّ بناء الرسم اللذي يظهر بالصورة من 5 نقاط, على الشكل الآتي: شكل رباعي محدّب ونقطة بداخله. القطع الواصلة بين النقاط شكلت الزوايا $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x$, حيث أن الزاوية x تقع الى جانب النقطة الداخلية. جد صيغة النقطة x بواسطة $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

حل. إن نصل النقطتين العُليَيينبالرسم , ينتج مثلث زواياه x, y, z, لذلك $x + y + z = 180^\circ$.

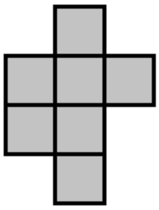
وبنفس الرسم ينتج شكل رباعي محدّب زواياه $\alpha + y, \beta, \gamma, \delta + z$. بحسب الصيغه لحساب زوايا الشكل الرباعي $y + \alpha + \beta + \gamma + \delta + z = 360^\circ$.



لذلك $180^\circ - x = y + z = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

لذلك $\alpha + \beta + \gamma + \delta + 180^\circ - 360^\circ = x$.

نبسّط: $x = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 180^\circ$.



6. معطاة ورقة تربيعات حيث طول ضلع المربع هو 1. تم تلوين 7 مربعات حيث تكوَّن مضلّع (معطى مثال بالصورة, لكنّه ليس بالضرورة الشكل اللّذي تم تكوينه). ما هو اكبر محيط يمكن ان يكون لمضلّع تكوّن بهذه الطريقة؟

حل. لو نلوّن 7 تربيعات متتاليه, نحصل على مستطيل اطوال أضلاعه 1, 7, 1, 7 ومحيطه $7 + 1 + 7 + 1 = 16$.

نثبت انه لا يمكن الحصول على محيط اكبر من ذلك. يمكن ان نلوّن تربيعات متتاليه واحده بعد الاخرى, حيث ابداءاً من التربيعه الثانيه, بكل مره نلون تربيعه محاذيه للتربيعه التي لوّنّاها . حيث انه جميع التربيعات تكون جسم مترابط واحد, لذلك يمكن ان نصل من كل تربيعه لكل تربيعه اخرى إذا مشينا على التربيعات الملونه, لذلك يوجد ترتيب لتلوين كالمذكور.

والآن نحاوا ان نفهم, كيف يتغير المحيط بتلوينه كتلك. عندما نلون التربيعه الاولى, المحيط يكون 4. بتلوين كل تربيعه اضافيه , يُمحى من المحيط قطعه بطول 1, وهي الحد للتربيعه الاضافيه التي نلونها مع التربيعه التي لوّنّاها سابقاً. يُحتملان ينتجوا 3 قطع جديده على الحدّ/الاطراف. يحتمل حتّى ان تمحى قطعة حد إضافية (عندما نلون تربيعه محاذيه لتربيعتين ملونتين او اكثر) ويتكونوا أقل من 3 قطع جديدة بالحد.على كل الحالات , قطعه بطول 1 على الاقل تُمحى من المحيط, وعلى الاكثر قطع مجموع اطوالها 3 تُضاف. لذلط المحيط مع كل تربيعه اضافيه يزيد بـ2 على الاكثر.

وبذلك, بعد التلوينه الأولى المحيط هو 4, ومع كل تلوينه اضافيه المحيط يمكن ان يزيد بـ2 ستة مرات على الاكثر. لذلك بالنهايه المحيط يكون $4 + 2 \cdot 6 = 14$ على الاكثر.