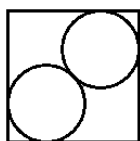
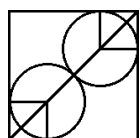


פתרון למבחן A (שנערך ב-29.9.2014).



1. בצירור שני מעגלים שווים, שמשיקים זה לזה ולארבעה צלעות של הריבוע, כאשר כל מעגל משיק לשתי צלעות בדיוק. מצאו את אורך הרדיוס של

המעגלים, בהנחה שאורך הצלע של הריבוע שווה ל-1.



פתרון. נעביר בתוך הריבוע אלכסון שעובר דרך שני מרכזי העיגולים. כמו כן, נוריד אנכים מכל מרכז לשני צלעות הקרובות אליו. נסמן את רדיוס העיגול ב- r . האלכסון מחולק החלק שמחבר את שני המרכזים הוא באורך $2r$, והחלקים האחרים הם אלכסונים בריבועים יותר קטנים, שצלעותיהם שווים לרדיוסים של המעגלים. לכן שני החלקים האחרים הם באורך $\sqrt{2} \cdot r$ לפי משפט פיתגורס. האלכסון של הריבוע הגדול הוא $\sqrt{2}$. לכן מתקבל הזהות

$$2r + 2\sqrt{2}r = \sqrt{2}$$

מכאן $r = \frac{\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}$. זו כבר תשובה, אבל ניתן לפשט אותה אם נכפיל מונה

$$.r = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ואז נקבל } \sqrt{2} - 1$$

2. נתונים מספרים ממשיים x, y המקיימים $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + 20y + 9 = 0$. מצאו את $x + 2y$.

פתרון. נסמן $z = x + 2y$. אז $z^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$, ואז מה שנתון הוא בעצם

$$z^2 + 10z + 9 = 0$$

וצריך למצוא בעצם את z . נוסיף 16 לשני האגפים; אז בצד שמאל יצא ריבוע:

$$z^2 + 10z + 25 = 16$$

$$(z + 5)^2 = 16$$

$$z + 5 = \pm 4$$

$$.z = -5 \pm 4$$

ובכן, יש שתי תשובות: -1 ו- -9 .

3. בפארק N ספסלים, ועל כל ספסל יושב מישהו. יש בדיוק 7 ספסלים אליהם יושב בן אדם אחד בלבד. יש גם ספסל שיושבים עליו 2 אנשים, וגם ספסל שיושבים עליו 3 אנשים, אבל על אף ספסל לא יושבים יותר מ-3. סה"כ על הספסלים יושבים 19 אנשים. מצאו את N .

פתרון. נניח שיש B ספסלים שיושבים עליהם שניים, ויש C ספסלים שיושבים עליהם 3 אנשים. אז $N = 7 + B + C$ (הרי על כל ספסל יש 1, 2 או 3 אנשים), וסה"כ אנשים $19 = 7 + 2B + 3C$

לכן

$$12 = 2B + 3C$$

נתון גם ש- $B \geq 1$ וגם $C \geq 1$. לכן

$$3B + 3C > 12 > 2B + 2C$$

מכאן נובע כי $6 > B + C$ ומצד שני $B + C > 4$. לכן $B + C = 5$, ואז

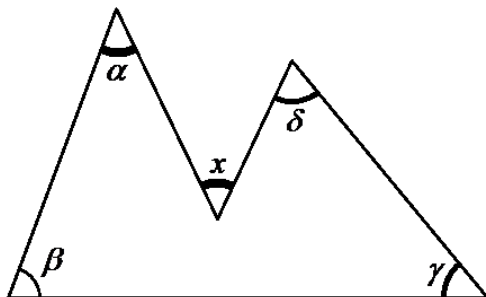
$$N = 7 + B + C = 7 + 5 = 12$$

מש"ל.

לא קשה למצוא מצב שבו זה מתקיים: כאשר יש 2 ספסלים של 3 אנשים ו-3 ספסלים של שני אנשים.

4. נתונים מספרים טבעיים a, b, c, d . מסתבר, שהמספרים a, b, c, d מסתברים, $a + b + c + d$ זוגי או אי-זוגי? $ad + bc$ שלושתם אי-זוגיים. האם $a + b + c + d$ זוגי או אי-זוגי?

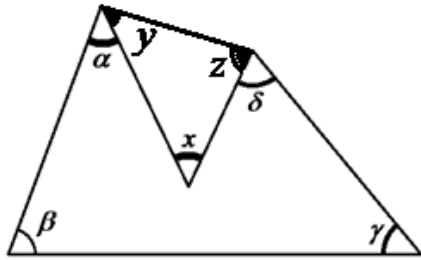
פתרון. מבין המספרים ab ו- cd אחד זוגי והשני אי-זוגי. המספר האי-זוגי מתקבל מכפלה של שני אי-זוגיים. לכן מבין 4 המספרים הנתונים a, b, c, d יש שניים אי-זוגיים, אבל יש גם מספר זוגי כי יש גם מכפלה זוגית. אפשר להגיד ש- a, b שניהם אי-זוגיים, או ש- c, d שניהם אי-זוגיים. אם יש בנוסף שני מספרים זוגיים, אז $ac + bd$ זוגי בניגוד לנתון, הרי בכל מחובר יש גורם זוגי. זה לא יתכן, לכן בין המספרים הנתונים a, b, c, d יש 3 מספרים אי-זוגיים ומספר אחד זוגי. לכן $a + b + c + d$ זוגי.



5. בציור מופיעה צורה, שנוצרת מ-5 נקודות: מרובע קמור ונקודה בתוכו, שמחברים אותם האופן מעגלי. בין הקטעים נוצרות זוויות $\alpha, \beta, \gamma, \delta, x$, כאשר הזווית x ליד הנקודה הפנימית. מצאו נוסחה עבור הזווית x בציור באמצעות הזוויות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

פתרון. עם נחבר את שתי הנקודות העליונות בציור, יוצר משולש שזוויותיו x, y, z , לכן

$$x + y + z = 180^\circ$$



נוצר באותו הציור גם מרובע קמור שזוויותיו

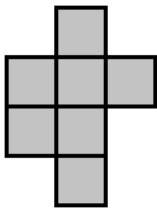
$\alpha + y, \beta, \gamma, \delta + z$. לפי הנוסחה של סכום זוויות

במרובע $y + \alpha + \beta + \gamma + \delta + z = 360^\circ$.

לכן $180^\circ - x = y + z = 360^\circ - \alpha - \beta - \gamma - \delta$.

לכן $\alpha + \beta + \gamma + \delta + 180^\circ - 360^\circ = x$.

נסכם: $x = \alpha + \beta + \gamma + \delta - 180^\circ$.



6. נתון דף משבצות, אורך הצלע של כל משבצת שווה 1. נצבעו 7 משבצות, כך שנוצר מצולע (יש דוגמה בציור, אבל זה לא חייב להיות בדיוק כמו בדוגמה). מהו ההיקף הגדול ביותר שיכול להיות למצולע זה?

פתרון. אם נצבע 7 משבצות ברצף בשורה אחת, נקבל מלבן שאורכי הצלעות שלו הם 1, 7, 1, 7 וההיקף הוא $7 + 1 + 7 + 1 = 16$.

נראה שלא ניתן לקבל היקף יותר גדול. ניתן לצבוע משבצות זו אחר זו, כאשר החל מהמשבצת השנייה בכל פעם נצבע משבצת שסמוכה למשבצת שכבר נצבעה. הרי כל המשבצות יוצרות גוש אחד, לכן ניתן להגיע לכל משבצת מכל משבצת כאשר הולכים על המשבצות הצבועות, לכן יש סדר צביעה כזה.

כעת נחשוב, כיצד משתנה ההיקף בצביעה כזאת. כאשר נצבע משבצת ראשונה, ההיקף יהיה 4. כאשר נצבע כל משבצת נוספת, ימחק מההיקף קטע באורך 1, שהוא גבול של משבצת שאנו צובעים כעת עם המשבצת שכבר נצבעה קודם. יתכן שיוצרו 3 קטעי גבול חדשים. יתכן אפילו שימחק עוד קטע גבול נוסף (כאשר צובעים משבצת שסמוכה לשתי משבצות צבועות או יותר) ושיוצרו פחות מ-3 קטעי גבול. על כל פנים, לפחות קטע אחד באורך 1 ימחק מההיקף, ולכל היותר קטעים שאורכם הכולל 3 יתווספו. לכן ההיקף עם כל משבצת נוספת יגדל ב-2 לכל היותר.

ובכן, לאחר הצביעה הראשונה ההיקף הוא 4, ועם כל צביעה נוספת ההיקף 6 פעמים יגדל ב-2 לכל היותר. לכן אורך ההיקף בסוף יהיה $4 + 2 \cdot 6 = 14$ לכל היותר.