



מבחן B

משך המבחן שלוש שעות. אין להשתמש במחשבון / חומר עזר.
יש להוכיח כל טענה ולהסביר כל תשובה. תשובה נכונה ללא הוכחה לא תקבל ניקוד.

1. חשבו את $\log_3 \left(5(2^2 + 3^2)(2^4 + 3^4)(2^8 + 3^8)(2^{16} + 3^{16})(2^{32} + 3^{32}) + 2^{64} \right)$.

2. במחומן משוכלל ABCDEFGH, הוכיחו כי $AB^2 + AD^2 = 2 \cdot AC^2$.

3. הוכיחו כי לכל זווית חדה α , מתקיים: $2\sqrt{\sin \alpha} \leq \cos \alpha + \tan \alpha$.

4. נתון משולש ששטחו S . דרך נקודה P בתוך המשולש מעבירים 3 ישרים, שמקבילים לצלעות המשולש. הישרים מחלקים את המשולש ל-6 חלקים: 3 מקביליות, ו-3 משולשים ששטחיהם S_1, S_2, S_3 . הראו כי $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} = \sqrt{S}$.

5. עבור איזה x מתקיים $\frac{\log_4 17}{\log_9 17} = \frac{\log_4 17 - \log_x 17}{\log_x 17 - \log_9 17}$?

6. הוכיחו כי אם α, β, γ הן זוויות של משולש, אז $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma$.

7. הראו כי $2^{n+2} \geq n^3$ לכל n טבעי.

8. פתרו את המשוואה $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

9. נניח כי $\{x^2\} = \{x\}^2$, כאשר $x > 100$ מספר ממשי, וסוגריים מסולסלות מסמנות חלק שברי של המספר. הוכיחו כי x מספר רציונאלי.

בהצלחה!