פתרון למבחן B (שנערך ב-29.9.2014)

1.إحسب الآتي $\log_3\left(5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)+2^{64}\right)$.

حلّ. نلاحظ أن $3-2=1$ وأنه $2+3=5$. ولذلك ان استعملنا صيغة الضرب المختصر $(a+b)(a-b)$ عدة مرات نحصل على :

$$
\begin{aligned}
&5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\\
&=(3-2)(3+2)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\\
&=\left(3^2-2^2\right)\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=\ldots=\\
&=\left(3^{32}-2^{32}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)=3^{64}-2^{64}
\end{aligned}
$$

ولذلك

$$
\begin{aligned}
&\log_3\left(5\left(2^2+3^2\right)\left(2^4+3^4\right)\left(2^8+3^8\right)\left(2^{16}+3^{16}\right)\left(2^{32}+3^{32}\right)+2^{64}\right)=\\
&=\log_3\left(3^{64}-2^{64}+2^{64}\right)=\log_3\left(3^{64}\right)=64
\end{aligned}
$$

2. معطى مثمن لمنتظم ABCDEFGH, أثبت أن $AB^2+AD^2=2\cdot AC^2$.

حلّ. بما أن المربع هو شكل منتظم, يمكن استبدال الضلع AB بأي ضلع اخر, مثلاً بـ-AH.
وبالاضافة , يمكن استبدال AC بكل قطر آخر الذي يصل بين رأسين محاذيين لأي رأس كان, مثلاً BH أو BD. لذلك يكفي أن تثبت أنّ

$$HA^2+AD^2=HB^2+BD^2.$$

المثمن المنتظم محصور داخل دائره, بها HD هو القطر. لذلك الزاوايا HAD ו-HBD قائمه, ولذلك بحسب نظرية فيثاغوروس

$$HA^2+AD^2=HD^2=HB^2+BD^2.$$

3. أثبت انه لكل زاويه حاده α, يتحقق : $2\sqrt{\sin\alpha}\le\cos\alpha+\tan\alpha$.

الحلّ الاول. السينوس, الكوسنوس والتانجنس للزاويه الحاده هي جميعاً قيم موجبه . نشغّل متباينة المعّدل (المعدّل الحسابي أكبر من المعدل الهندسي) على التانجنس والكوسينوس بالشكل الآتي:

$$\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\cos\alpha\cdot\tan\alpha}\le\frac{\cos\alpha+\tan\alpha}{2}$$

وبذلك نحصل على المطلوب.

الحلّ الثاني. السينوس, الكوسنوس والتانجنس للزاويه الحاده هي جميعاً قيم موجبه, لذلك طرفيّ المتباينه هما معرّفان وموجبان. لذلك يمكن تربيع الطرفين:

$$4\sin\alpha \le (\cos\alpha + \tan\alpha)^2$$

$$4\sin\alpha \le \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\tan\alpha + \tan^2\alpha$$

$$4\sin\alpha \le \cos^2\alpha + 2\sin\alpha + \tan^2\alpha$$

$$0 \le \cos^2\alpha - 2\sin\alpha + \tan^2\alpha$$

$$0 \le (\cos\alpha - \tan\alpha)^2$$

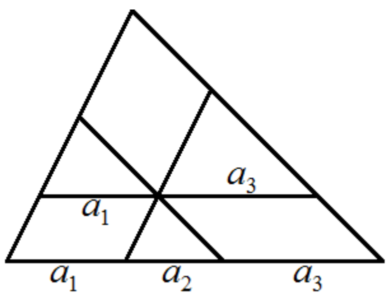
ومن هنا الاجابه واضحه.

4. معطى مثلث مساحته S. عبر النقطه P بداخل المثلث نمرر 3 مستقيمات, حيث توازي اضلاع المثلث. المستقيمات تقسم المثلث لـ-6 اقسام: 3 متوازيات اضلاع, ו-3 مثلثات مساحتها S_1, S_2, S_3. أثبت أنّ $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}=\sqrt{S}$.

حلّ. نقوم بتدوير الرسم حيث يكون للمثلثضلع افقي. لِيكُن طول الضلع الافقي بالرسم الاصلي a, والارتفاع الناز عليه طوله h. أطوال الاضلاع الافقيه بالمثلثات الصغيره الناتج نرمز لها a_1, a_2, a_3, واطوال الارتفاعات النازله على كلٍّ منها h_1, h_2, h_3.

نرمز $\kappa = \frac{h}{a}$. من تشابه المثلثات نستنتج انّه ايضاً מדמיון משולשים מקבל שגם $\frac{h_1}{a_1} = \frac{h_2}{a_2} = \frac{h_3}{a_3} = \kappa$. لذلك نحصل على $S_i = \frac{a_i h_i}{2} = \frac{\kappa}{2}\cdot a_i^2$, أي انه $\sqrt{S_i} = \mu a_i$, حيث $\mu = \sqrt{\frac{\kappa}{2}}$. بنفس الصوره نحصل على صيغه مشابهة للمثلث الكبير: $\sqrt{S} = \mu a$, مع نفس الـ- μ.

بالرسم يظهر متوازي اضلاع, وبمتوازي الاضلاع الاضلاع المتقابله متساويه. من بين الاضلاع a_1, a_2, a_3 فقط واحده متواجده على الضلع a, والأخريين يمكن نسخهما للضع a بواسطة متوازي اضلاع. بذلك نستنتج ان الضلع a تتركب من قطع بأطوال a_1, a_2, a_3, لذلك



$a = a_1 + a_2 + a_3$.

وكذلك $\mu a = \mu a_1 + \mu a_2 + \mu a_3$,

اي انه $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$. وهو المطلوب.

5. لأي قيم x يتحقق $\frac{\log_4 17}{\log_9 17} = \frac{\log_4 17 - \log_x 17}{\log_x 17 - \log_9 17}$?

حلّ. نرمز $a = \log_4 17$, $b = \log_9 17$, $y = \log_x 17$.

إذاً المعادلة هي $\frac{a}{b} = \frac{a-y}{y-b}$ أي أنه $a(y-b) = b(a-y)$ أي أنه $ay + by = 2ab$

بكلمات أخرى (بعد أن نقسّم طرفيّ المعادله بـaby):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{y}$$

ما يعني انه: $\frac{1}{\log_4 17} + \frac{1}{\log_9 17} = \frac{2}{\log_x 17}$, أي-

$$\log_{17} 4 + \log_{17} 9 = 2\log_{17} x$$

$$\log_{17} 4 \cdot 9 = \log_{17} x^2$$

$$6^2 = x^2$$

لذلك $x = 6$, حيث أنه لكي يكون اللوغاريتم (log) معرّف, يجب أن يكون x عدد موجب.

6. أثبت أنه إذا كانت α, β, γ زوايا مثلث, إذاً

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma$.

حلّ. الصيغه اعلاه تعادل -

$$\tan\alpha + \tan\beta = (\tan\alpha \cdot \tan\beta - 1) \cdot \tan\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} = -\tan\gamma$$

$$\tan(\alpha + \beta) = -\tan\gamma$$

ولكن مجموع زوايا المثلث هو دائماً πراديان , مما يعني نحتا لأن نثبت انه

$\tan(\pi - \gamma) = \tan(-\gamma)$,

وهذا صحيح لأن التانجنس دوري مع دورة π بحسب تعريفه.

7. أثبت أنه $2^{n+2} \geq n^3$ لكل n طبيعي.

حلّ. نحاول ان نثبت ذلك بالإندوكتسيا (الإستقراء).

نفرض أننا أثبتنا لـ n حيث يتحقق $2^{n+2} \geq n^3$, ونريد ان نثبت انه $2^{n+3} \geq (n+1)^3$. نلاحظ أنه يمكننا فصل المتباينه أعلاه لضرب بين افتراض الإندوكتسيا مع المتباينه التاليه:

$$2 \geq \frac{(n+1)^3}{n^3}.$$

هذا يتحقق تحت الافتراض انه - $2n^3 \geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, أي $n^3 \geq 3n^2 + 3n + 1$, أي انه عندما يتحقق $1 \geq \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$. عندما $n \geq 4$ ذلك يتحقق , وذلك لانه

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{16} = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} > \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64} \geq \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

لذلك إن اثبتنا الإدعاء لـ $n = 4$,إذا الإدعاء يُبَرهن بالإنداكتسيا لكل $n > 4$.

لـ $n = 1, 2, 3, 4$ من السهل أن نفحص لكل واحد:

$$2^{1+2} = 8 > 1 = 1^3,$$
$$2^{2+2} = 16 > 8 = 2^3,$$
$$2^{3+2} = 32 > 27 = 3^3,$$
$$2^{4+2} = 64 = 4^3.$$

8. حلو المعادله $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

حلّ أوّل. بكلمات أخرى $\cos 2x = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, أي انه $\pm 2x + 2\pi k = \frac{\pi}{2} - x$, عندما k صحيح.

هذا يعطي إمكانيتين - أو انه اذا كانت الاشاره + : $3x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k$, أي $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} m$ لكل mصحيح (هنا بدلنا الاشاره عدد صحيح), أي $\sin$ هو $\frac{1}{2}$ أو -1. الامكانيه الاخرى هي عندما الاشاره هي − وإذاً $2\pi k - \frac{\pi}{2} = x$, ومرة اخره نحصل على اللمكانيه انه $\sin$ هو -1.

الأسهل هو ان ننقص من mواحد, ونحصل على اجابه من الصوره $x = \frac{2\pi}{3} m - \frac{\pi}{2}$.

حلّ ثاني. نرمز $\sin x = s$,اذاً معطى أنه $s = s^2 - s^2 - 1$, أي $0 = 2s^2 + s - 1$. من السهل المعادلة التربيعيه : $s = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \frac{1}{2}, -1$. من هنا نحصل على نفس الاجابه كما بالحل الأول.

9. نفرض انه $\{x^2\} = \{x\}^2$, عندما $x > 100$ عدد حقيقي, والحاصرتان {} تمثلان الجزء الكسري للعدد. أثبتو انه x هو كسر.

حلّ. يمكن أن نكتب $x = n + \{x\}$,حيث n هو عدد صحيح. إذاً

$$\{n^2 + 2n\{x\} + \{x\}^2\} = \{(n + \{x\})^2\} = \{x\}^2$$

ولذلك $2n\{x\} = m$ هو عدد صحيح. لذلك $\{x\} = \frac{m}{2n}$ و لذلك $x = n + \frac{m}{2n} = \frac{2n^2 + m}{2n}$.

والآن من الواضح ان x عدد كسري , وذلك لأننا كتبناه على صورة نسبه بين عددين صحيحين.