פתרון למבחן C (שנערך בספטמבר 2014)

1. מצאו את השארית שמתקבלת כאשר מחלקים פולינום $(x+1)^7+x^5+(x-1)^3$ בפולינום $x+2$.

פתרון. ידוע, שכל פולינום $p(x)$ ניתן להציג באמצעות חלוקה עם שארית בצורה

$$p(x)=(x+2)q(x)+r$$

כאשר r הוא שארית של p בחלוקה ל-$x+2$, וזה בהכרח פולינום שדרגתו נמוכה מ-1, כלומר קבוע. אם מציב -2, אז המחובר שמכיל $x+2$ יתאפס. לכן $p(-2)=r$.

במקרה ש-$p(x)=(x+1)^7+x^5+(x-1)^3$, השארית היא

$$r=(-2+1)^7+(-2)^5+(-2-1)^3=-1^7-2^5-3^3=-1-32-27=-60.$$

2. חשבו את $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

פתרון.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\underset{\left(y=\frac{x}{2}\right)}{=}-\frac{1}{2}\cdot\lim_{y\to 0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=-\frac{1}{2}\cdot 1=-\frac{1}{2}$$

3. מה יותר גדול: $\sin 1^\circ+\sin 3^\circ+\sin 5^\circ+\ldots+\sin 175^\circ+\sin 177^\circ$
או $\sin 2^\circ+\sin 4^\circ+\sin 6^\circ+\ldots+\sin 176^\circ+\sin 178^\circ$?

פתרון. בתחום $[0,\pi]$, שזה בעצם $\left[0^\circ,180^\circ\right]$ סינוס היא פונקציה קעורה ממש (בוכה), ולכן לכל $1\le n\le 179$ מתקיים $\dfrac{\sin\left(n^\circ-1^\circ\right)+\sin\left(n^\circ+1^\circ\right)}{2}\ge\sin\left(n^\circ\right)$.

נחבר אי-שוויונים כאלה עבור כל מספרים אי-זוגיים מ-1 עד 179 ונקבל:

$$\sin 1^\circ + \sin 3^\circ + \sin 5^\circ + \ldots + \sin 175^\circ + \sin 177^\circ <$$
$$< \tfrac{1}{2}\sin 0 + \sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \ldots + \sin 176^\circ + \sin 178^\circ + \tfrac{1}{2}\sin 180^\circ =$$
$$= \sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \ldots + \sin 176^\circ + \sin 178^\circ$$

הרי $\sin 0 = 0 = \sin 180^\circ$.

הערה. ניתן לקבל את אי-השוויון הזה גם בלי שיקולי קמירות, הרי

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

והרי בדרך כלל $1 > \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, לכן כל עוד כל הסינוסים בנוסחה אי-שליליים מקבלים אי-שוויון בכיוון הנכון.

4. חשב את $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2}\right)$.

פתרון. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right) = \int\limits_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot dx = \frac{\pi}{4}$

הרי המשמעות הגיאומטרית של האינטגרל זה רבע עיגול של רדיוס 1.

5. שני ישרים ℓ_1, ℓ_2 שמקבילים זה לזה, משיקים לאליפסה $\mathcal{E}$ בנקודות שונות A ו-B. שני ישרים אחרים ℓ_3, ℓ_4 שמקבילים לישר AB, משיקים לאותה לאליפסה $\mathcal{E}$ בנקודות שונות C ו-D. הוכח כי הישר CD מקביל לישרים ℓ_1, ℓ_2.

פתרון. אליפסה ניתן להציג במערכת צירים מסוימת בתור $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. מכאן קל לראות, שאם מגדילים את האליפסה בציר אחד, כלומר מכפילים את קואורדינאטה y ב-$\frac{a}{b}$, אז האליפסה הופכת למעגל. העתקה זו (להכפיל קואורדינאטה שנייה של כל נקודה בקבוע) הופכת קו ישר לקו ישרה ושומרת על השקה בין ישר לאליפסה, וגם על מקבילות הישרים. לכן מספיק להראות שהטענה מתקיימת לאחר המתיחה.

ובכן, מספיק לפתור את השאלה עבור מעגל. שני משיקים ℓ_1, ℓ_2 שמקבילים זה לזה הם משיקים בקצוות של אותו הקוטר, הרי הרדיוסים שעוברים בנקודות ההשקה מאונכים למשיקים, ולכן גם הם חייבים להיות בכיוונים מקבילים, כלומר אלה שני רדיוסים

שנמצאים על אותו קוטר d. כל התמונה סימטרית ביחס לישר של d, לכן גם C סימטרי ל-D ביחס לישר של d, ולכן CD מאונך ל-D ומקביל לישרים ℓ_1,ℓ_2.

מתיחה בציר y הייתה חיונית להוכחה: אחרת לא היינו מקבלים מאונכות של ישרים.

6. הוכח כי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2=n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}$.

פתרון ראשון.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k^2=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(k+k(k-1)\right)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k+\sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k(k-1)=$$
$$=n\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+n(n-1)\cdot\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}=$$
$$=n\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}+n(n-1)\cdot\sum_{j}^{n-2}\binom{n-2}{j}=n\cdot(1+1)^{n-1}+n(n-1)\cdot(1+1)^{n-2}=$$
$$=n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}$$

פתרון שני. נניח שמתוך n אנשים צריך לבחור מפלגה, ובמפלגה צריך למנות גם יושב ראש ונשיא (יתכן שיושב ראש הוא הנשיא, אבל לאו דווקא). כמה דרכים יש לעשות זאת?

נפתור שאלה זו בשתי דרכים.

מצד אחד, לבחור מפלגה של k אנשים ניתן ב-$\binom{n}{k}$ דרכים, אחר כך יש k דרכים לבחור יושב ראש ו-k דרכים לבחור נשיא. זה משאיר נותן לנו $\binom{n}{k}k^2$ אפשרויות, וצריך לסכם על k, וכך מקבלים את האגף השמאלי.

מצד שני, אפשר להפריד לשני מקרים. יש n דרכים לבחור נשיא. אם הוא גם יושב ראש, אז מה שנשאר זה לצרף אליו תת-קבוצה כלשהי מתוך $n-1$ האנשים האחרים, ואת זה ניתן לעשות ב-2^{n-1} דרכים, כלומר כאשר יושב ראש הוא הנשיא יש $n\cdot 2^{n-1}$ אפשרויות. אם יושב ראש הוא לא הנשיא, יש $n-1$ דרכים לבחור אותו, ואז אפשר לצרף למפלגה כל תת-קבוצה מתוך $n-2$ האנשים האחרים, שלזה 2^{n-2} אפשרויות. כלומר במקרה השני $n(n-1)2^{n-2}$ אפשרויות. ביחד משני המקרים מקבלים את האגף הימני של הזהות.

7. מה יותר גדול: $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ או e ?

פתרון ראשון. $\ln\dfrac{101}{100}=\ln 101-\ln 100=\ln x\Big|_{100}^{101}=\displaystyle\int_{100}^{101}\frac{dx}{x}<\frac{1}{100}$

לכן אם נעלה e בחזקה של כל אחד מהאגפים נקבל $1+\dfrac{1}{100}=\dfrac{101}{100}<e^{\frac{1}{100}}$,

כלומר $e>\left(1+\dfrac{1}{100}\right)^{100}$.

פתרון שני. ידוע כי $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$. נחקור את התנהגות הפונקציה $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ בתחום $\left[100,\infty\right)$. בשביל זה נגזור את הפונקציה:

$$f'(x)=\left(\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\right)'=\left(e^{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x}\right)'=e^{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x}\left(\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)\cdot x\right)'=$$
$$=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)+\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\tfrac{1}{x}\right)'\right)=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^{2}}\right)=$$
$$=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}\left(\ln\left(\tfrac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)$$

השאלה החשובה היא האם פונקציה עולה או יורדת בתחום $\left[100,\infty\right)$, כלומר האם הנגזרת שלילית או חיובית. ברור שהגורם $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ חיובי. לגבי הגורם השני, נשתמש באי-שוויון ידוע $\ln\left(1+t\right)\le t$; השוויון מתקיים רק ב-0, זה מתקבל מכך ש- $\ln$ היא פונקציה קעורה שנמצאת מתחת למשיק. אז

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{x+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x+1}\ge$$
$$\ge\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=0$$

אי-שוויון לא הופך לשוויון עבור $x\ge 100$, לכן הפונקציה עולה ממש, לכן

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\tfrac{1}{100}\right)^{100}$$

8. מתומן ABCDEFGH משוכלל, AE = 2. על AE נבחרה נקודה X, שמחלקת את הקטע AE ביחס 3:1. מצא את $\mathrm{AX}\cdot\mathrm{BX}\cdot\mathrm{CX}\cdot\mathrm{DX}\cdot\mathrm{EX}\cdot\mathrm{FX}\cdot\mathrm{GX}\cdot\mathrm{HX}$.

פתרון. נצייר את המתומן על המישור המרוכב, כאשר מרכז המתומן הוא 0, ונקודה A היא 1. אז הקודקודים הם שורשי הפולינום z^8-1, כלומר ניתן לרשום

$$z^8-1=(z-a)(z-b)(z-c)\cdot\ldots\cdot(z-h),$$

כאשר $a,b,c,\ldots,h$ הם המספרים המרוככבים שמתאימים לקודקודי המתומן. קל לראות כי X מתאימה למספר המרוכב $x=\pm\frac{1}{2}$. לכן

$$\mathrm{AX}\cdot\mathrm{BX}\cdot\mathrm{CX}\cdot\mathrm{DX}\cdot\mathrm{EX}\cdot\mathrm{FX}\cdot\mathrm{GX}\cdot\mathrm{HX}=|x-a|\cdot|x-b|\cdot|x-c|\cdot\ldots\cdot|x-h|=$$
$$=\left|(x-a)(x-b)(x-c)\cdot\ldots\cdot(x-h)\right|=\left|x^8-1\right|=\left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^8-1\right|=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

9. פירמידה משולשת מוכלת בקוביית יחידה. מה יכול להיות הנפח המרבי שלה?

פתרון. נפח שווה לשטח הבסיס כפול הגובה חלקי 3. לכן אם מזיזים קודקוד אחד של פירמידה לאורך קטע ישר, מקבלים נפח מכסימלי כאשר המרחק מהפאה הנגדית הוא גדול ביותר, כלומר באחד מקצוות הקטע.

אם אחד מקודקודי הפירמידה הוא נקודה פנימית של הקובייה, אפשר להעביר דרכה ישר שיחתוך את הקובייה לאורך קטע. אפשר להחליף את הנקודה לנקודה קיצונית של הקטע והנפח לא יקטן. לכן מספיק לפתור את השאלה במקרה שכל הקודקודים נמצאים על פאות הקובייה.

אם אחד מקודקודי הפירמידה נמצאת על נקודה פנימית של פאה של הקובייה, ניתן להעביר ישר שנמצא במישור הפאה. ישר זה יחתוך את הקובייה לאורך קטע, שנמצא בפאה של הקובייה. ניתן להחליף את הקודקוד הנוכחי באחד מקצוות הקטע, כך שהקטע לא יקטן. לכן לכן מספיק לפתור את השאלה במקרה שכל הקודקודים נמצאים על מקצועות הקובייה.

באופן דומה, אם קודקוד של פירמידה נמצא על המקצוע של הקובייה, ניתן להזיז אותו לאחד הקודקודים של אותו המקצוע, והנפח לא יקטן. לכן מספיק לפתור את השאלה למקרה שכל קודקודי הפירמידה הם גם קודקודים של קוביה. זה משאיר לנו מספר סופי של מקרים.

להמשך נניח שפאה אופקית הוא ריבוע ABCD, ומקצועות אנכיים הם 'AA', 'BB', 'CC', 'DD'. ניתן מראש לפסול את האפשרות שבו כל הקודקודים באותה פאה, הרי אז הנפח 0.

יש מספר מקרים, בהם 3 קודקודים באותה פאה (למשל 'ABCB). שלוש נקודות אלו יוצרות משולש ששטחו $\frac{1}{2}$, וגובה 1, לכן הנפח $\frac{1}{6}$.

נבדוק כעת מקרים, שבהם אף 3 נקודות לא בישר אחד. נפריד את המקרים האלה לשתי סוגים: כאשר לוקחים שני קודקודים סמוכים של קובייה וכאשר לא לוקחים.

אם יש לנו שני קודקודים סמוכים של הקובייה, נניח שאלה A ו-B (ואם לא – נסובב את הקובייה). אז אסור לקחת את הקודקודים C, D, 'A', 'B כי אז חוזרים שוב למקרה של 3 קודקודים בפאה אחד. נשארים רק 2 קודקודים : 'C ו-'D, ולכן אם רוצים 4 קודקודים צריך לקחת את שניהם. אבל אז 4 הקודקודים A, B, 'C', 'D במישור אחד, והנפח 0.

ובכן, נשאר המקרה שבו אין 3 קודקודים בפאה אחד, ואף שני קודקודי קוביה שלוקחים לא סמוכים. נוכל להניח שלוקחים את A (ואם לא, אפשר לסובב את הקובייה). לכן לא לוקחים את B, D, 'A', כי אמרנו שלא לוקחים קודקודים בסמוכים. אם ניקח גם את 'C זה יפסול לנו את כל הקודקודים האחרים: את 'B', 'D ואת C, לכן אסור לקחת גם את 'C.
נשארים רק הקודקודים C, 'B ו-'D, וחייבים לקחת את כולם, על מנת שיהיו 4 קודקודים.

ובכן, 'ACB'D זה המקרה היחיד (עד כדי סיבוב) שנשאר לבדוק. אפשר לקבל את המקרה הזה כאשר מורידים מקוביית יחידה 4 פירמידות 'AA'B'D', 'CC'B'D', 'ACBB, 'ACDD, שלכל אחד מהם 3 קודקודים בפאה אחת, כלומר הנפח $\frac{1}{6}$ כמו שחישבנו קודם.
לכן לפירמידה 'ACB'D הנפח הוא $1-4\cdot\frac{1}{6}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.