פתרון למבחן C (שנערך בספטמבר 2014)

1. جد باقي قسمة الداله $\left(x+1\right)^7+x^5+\left(x-1\right)^3$ بالداله $x+2$.

حلّ. معطى أن كل دالة تربيعيه $p\left(x\right)$ يمكن كتابته على صورة ناتج قسمه مع باقي بالشل الآتي

$$p\left(x\right)=\left(x+2\right)q\left(x\right)+r$$

حيث r هو باقي قسمة p بـ $x+2$, وهذا بالتاكيد دالة تربيعيه مع درجة اقل من 1, اي عدد ثابت اذا عوضنا -2, اذان الجزء بالمجموع الذي يحوي $x+2$ يصبح صفر. لذلك $p\left(-2\right)=r$.

في حال انه - $p\left(x\right)=\left(x+1\right)^7+x^5+\left(x-1\right)^3$, باقي القسمه هو

$$r=\left(-2+1\right)^7+\left(-2\right)^5+\left(-2-1\right)^3=-1^7-2^5-3^3=-1-32-27=-60.$$

2. إحسبوا $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

حلّ.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\dfrac{1}{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x-1}{x^2}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}-\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^2}=1\cdot\lim_{x\to0}\frac{-2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\underset{\left(y=\frac{x}{2}\right)}{=}-\frac{1}{2}\cdot\lim_{y\to0}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2=-\frac{1}{2}\cdot1=-\frac{1}{2}$$

3. أيهما أكبر: $\sin1^\circ+\sin3^\circ+\sin5^\circ+\ldots+\sin175^\circ+\sin177^\circ$

أم $\sin2^\circ+\sin4^\circ+\sin6^\circ+\ldots+\sin176^\circ+\sin178^\circ$?

حل. بالمجال $\left[0,\pi\right]$, بالواقع هو $\left[0^\circ,180^\circ\right]$ السينوس هي دالة محدبه (تبكي), ولذلك لكل $1\le n\le179$ يتحقق $\sin\left(n^\circ\right)\ge\dfrac{\sin\left(n^\circ-1^\circ\right)+\sin\left(n^\circ+1^\circ\right)}{2}$.

نجمع المتباينات سويه لكل الاعداد الفرديه من 1 وحتى 179ونحصل على:

$$\begin{aligned}&\sin 1^\circ+\sin 3^\circ+\sin 5^\circ+\ldots+\sin 175^\circ+\sin 177^\circ<\\&<\tfrac{1}{2}\sin 0+\sin 2^\circ+\sin 4^\circ+\sin 6^\circ+\ldots+\sin 176^\circ+\sin 178^\circ+\tfrac{1}{2}\sin 180^\circ=\\&=\sin 2^\circ+\sin 4^\circ+\sin 6^\circ+\ldots+\sin 176^\circ+\sin 178^\circ\end{aligned}$$

حيث $\sin 0=0=\sin 180^\circ$.

ملاحظه. يمكن ان نصل لهذه المتباينهبدون اخذ التحدُّب بالحسبان, حيث

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

وايضاً يتحقق بشكل عام $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}<1$, لذلك ما دام كل ما يحوي السينوس بالمعادله غير سالب نحصل على المتباينه مع اتجاه تبايُن صحيح.

4. إحسب $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2}\right)$.

حلّ. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{n^2-k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}\right)=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\cdot dx=\frac{\pi}{4}$$

بما أن المعنى الهندسي للأنتجرال هو ربع دائره بنصف قطر 1.

5. مستقيمان ℓ_1,ℓ_2 متوازيين, هما مماسّين للإهليج (אליפסה) $\mathcal{E}$ بالنقطتين المختلفتين A و B. مستقيمين آخرين ℓ_3,ℓ_4 موازيان للمستقيم AB, مماسّان لنفس الإهليج $\mathcal{E}$ بنقطتين مختلفتين C و D. أثبت أن المستقيم CD موازي للمستقيمين ℓ_1,ℓ_2

حل. يمكن رسم الإهليج على نظام إحداثي معيّن بالطريقه الآتيه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. من هنا نرى بوضوح , انه اذا كبرنا الاهليج بإحداثي واحد , دأي نضرب الإحداثي y بـ$\frac{a}{b}$, إذاً الاهليج يتحول لدائرة. هذا التحويل (أن نضرب الإحداثي الثاني لكل نقطه بعدد ثابت) تحول خط لخط أخر وتحافظ على التماسّ بين الاهليج وخطّ, وأيضاً تحافظ على توازي الخطوط. لذلك يكفي ان نثبت الادعاء بعد التحويل.

وبذلك يكفي ان نحل السؤال لدائرة.مماسّين ℓ_1, ℓ_2 متوازيين هما مماسين بأطراف نفس القطر, حيث ان انصاف الاقطار المارّين بنقطة التماس معامدين للماسين, ولذلك هما ايضاً باتجاهات متوازيه, أي أنها نصفا قطر متواجدان على نفس نصف القطر d.الصوره اجمع هي متناظره بالنسبه للمستقيم الواقع عليه d , لذلك ايضاً C مناظر لـD بالنسبه للمستقيم الواقع عليه d, ولذلك CD معامد لـD وموازي للمستقيمين ℓ_1, ℓ_2. التحويل بإحداثي y ضروري جداً للبرهان : غير ذلك لم نكن لنحصل على تعامد المستقيمات.

6. أثبت أن $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$.

حلّ أول.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(k + k(k-1)\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k + \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k(k-1) =$$
$$= n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} =$$
$$= n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} + n(n-1) \cdot \sum_{j}^{n-2} \binom{n-2}{j} = n \cdot (1+1)^{n-1} + n(n-1) \cdot (1+1)^{n-2} =$$
$$= n \cdot 2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2}$$

حلّ ثاني . نفرض انه من بين n أُناس يجب ان نختار مجموعه, وبالمجموعه يجب تعيين رئيس ووزير (يمكن ان يكون الرئيس ايضاً وزير, لكن ليس بالضرورة).بكم طريقه يمكن فعل ذلك؟

نحل هذا السؤال بطريقتين.

من ناحيه اولى, يمكن اختيل مجموعه من k اشخاص بـ- $\binom{n}{k}$ امكانيات, بعد ذلك توجد k امكانيات ل- k امكانيات لاختيار وزير. وبذلك يوجد $\binom{n}{k} k^2$ امكانيات لاختيار مجموعه من k اشخاص مع تعيين رئيس ووزير, يجب ان نجمع كل هذه الاعداد لكل k, وبذلك نحصل على الطرف اليسار.

من ناحي اخرى,يمكن ان نفصل لحالتين. يوجد n امكانيات لاختيار رئيس. اذا كان هو ايضاً وزير,اذاً بقي ان نضيف له مجموعه من الـ $n-1$ الاشخاص الباقين,ويمكن فعل ذلك بـ 2^{n-1}

امكانيات, أي انه عندما يكون الرئيس هو وزير اذاً يوجد $n\cdot 2^{n-1}$ امكانيات. اذا كان الرئيس والوزير شخصين مختلفين , يجد $n-1$ امكانيات لاختيار الوزير, واذاً يمكن اضافة كل مجوعه من بين الـ $n-2$ الاشخاص الباقين, ولذلك 2^{n-2} امكانيات. أي بالحالة الثانيه $n(n-1)2^{n-2}$ امكانيات.نجمع التعبيرين من الحالتين نحصل على الطرف اليسار.

7. أيهما أكبر: $\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$ ام e ?

حل أول. $$\frac{1}{100}>\int_{100}^{101}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_{100}^{101}=\ln 101-\ln 100=\ln\frac{101}{100}$$

لذلن ان نرفع e بالقوه من الطرفين نحصل على $e^{\frac{1}{100}}>\frac{101}{100}=1+\frac{1}{100}$,

اي $e>\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100}$.

حل ثاني.معطى انه $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. نحقق الداله $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ بالمجال $[100,\infty)$ $[100,\infty)$. لذلك نجد مشتقة الداله:

$$f'(x)=\left(\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\right)'=\left(e^{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x}\right)'=e^{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\cdot x}\left(\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\right)\cdot x\right)'=$$
$$=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)+\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(1+\tfrac{1}{x}\right)'\right)=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(\tfrac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right)$$

ما نحتاج لأن نعرفه هو هل الداله تصاعديه ام تنازليه بالمجال $[100,\infty)$, اي هل المشتقه موجبه ام سالبه.من الواضح ان $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ موجب. اما بالنسبه للقسم الاخر من الداله, نستعمل النتبباينه الاتيه: $\ln(1+t)\le t$;نحصل على تساوي فقط بـ 0 و هذا يحصل لان الـ $\ln$ هي داله مقعره تحت اللماس. لذلك

$$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}=-\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-\frac{1}{x+1}=-\ln\left(1-\frac{1}{x+1}\right)-\frac{1}{x+1}\geq$$
$$\geq\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=0$$

المتباينه لا يمكن ان تصبح تساوي لكلّ $x\geq 100$, لذالك الداله تصاعديه, لذلك

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}>\left(1+\tfrac{1}{100}\right)^{100}$$

8. مثمن منتظم ABCDEFGH, AE = 2. على AE وُضعت نقطه X, حيث تقسم القطعه AE بنسبة 13:. جد قيمة $AX\cdot BX\cdot CX\cdot DX\cdot EX\cdot FX\cdot GX\cdot HX$.

حل. نرسم المثمن على المستوى المركب, حيث مركز المثمن بالـ0 , والنقطه A هي 1. اذا احداثيات رؤوس المثمن هي جذور الدالة $z^{8}-1$, اي بالامكان كتابة

$$z^{8}-1=(z-a)(z-b)(z-c)\cdot\ldots\cdot(z-h),$$

حيث $a,b,c,\ldots,h$ هي الاعداد المركبه الملائمه لرؤوس المثمن. من الواضح انه X مناسبه لعدد المركب $x=\pm\frac{1}{2}$. لذلك

$$AX\cdot BX\cdot CX\cdot DX\cdot EX\cdot FX\cdot GX\cdot HX=|x-a|\cdot|x-b|\cdot|x-c|\cdot\ldots\cdot|x-h|=$$
$$=|(x-a)(x-b)(x-c)\cdot\ldots\cdot(x-h)|=|x^{8}-1|=\left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^{8}-1\right|=1-\frac{1}{256}=\frac{255}{256}$$

9. معطى هرم ثلاثي بداخل مكعّب الوحدة (مكعب طول ضلعه 1 سم). ما هو أكبر حجم يمكن أن يكون لهذا لهرم الثلاثي؟

حل. حجم الهرم هو مساحة القاعده مضرب بثلث الارتفاع. لذلك اذا ازحنا احد رؤوس الهرم على طول قطعه مستقيمه, نحصل على الحجم الاكبر عندما يكون البعد عن الوجه المقابل له هو الاكبر, أي باحد طرفي القطعه.

اذا كان احد رؤوس الهرم هو نقطه بداخل المكعب, يمكن تمرير مستقيم عبرها حيث يقطع المكعب على طول القطعه. يمكن استبدال النقطه بننقطه على طرف القطعه والحم لا يصغر.لذلك يكفي ان نحل السؤال للحالة ان جميع الرؤوس متواجدون على أوجه المكعب.

بنفس الطريقه , لو كان رأس الهرم متواجد على ضلع المكعب , يمكن ازاحة راس الهرم لرأس نفس الضلع , والحجم لا يصغر. لذلك يكفي ان نحل السؤال للحابه حيث جميع رؤوس الهرم هم ايضاً رؤوس المكعب. مما يترك لنا اقل بكثير حالات لنفحصها.

لننهي حل السؤال نفرض ان وجه افقي هو مربع ABCD, والاضلاع المعامده 'AA, 'BB, 'CC, 'DD. يمكن استبعاد الامكانيه ان جميع الرؤوس هي بنفس الوجه لأنه عندها الحجم هو 0.

هنالك عدد حالات بها 3 رؤوس هي بنفس الوجه (مثلاً 'ABCB). هذه الثلاثة نقاط تشكل مثلث مساحته $\frac{1}{2}$, وارتفاع 1, اذاً الحجم $\frac{1}{6}$.

نفحص الان الحالات بها لا توجد 3 نقاط بوجه واحد. نقسم هذه الحالات لنوعين: سواءاً اذا اخذنا رأسين محاذيين بالمكعب أم لا.

لو ان رأسين محاذيين بالمكعب, نفرض انهما A و B (لو كان غير ذلك - نلفّ المكعكب). אז يمنع ان نفرض انهما الرأسين C, D, 'A, 'B لانه عندها نعود لنفس الحاله التي بها 3 رؤوس بنفس الجهة. يتبقى رأسين فقط : 'C و 'D, ولذلك اذا اردنا 4 رؤوس يجب ان نفرضهما الاثنين ('C و 'D) ولكن حينها نحصل على 4 رؤوس بنفس المستوى وإذاً الحجم 0.

وبذلك بقيت الحاله بها 3 رؤوس بنفس الوجه , ولا أي زوج من رؤوس المكعب التي اخترناها هي محاذيه . يمكن ان نفرض اننا اخذنا A (لو كان غير ذلك - نلفّ المكعكب). لذلك لا نأخذ B, D, 'A, لاننا قد ذكرنا ان لا نأخذ رؤوس متجاورة. لو نأخذ ايضاً 'C نضطر لاستبعاد باقي الرؤوس : 'B, 'D و C, لذا يمنع ايضاً اخذ 'C. نتبقى فقط مع الرؤوس C, 'B ו-’D,ويجب اخذ جميعها, حتى نحصل على 4 رؤوس.

وبهذا , 'ACB'D هو الحالة الواحدة (حتى لفّ المكعب) التي بيقيت لنفحصها. يمكن الحصول على هذه الحالة عند انزال 4 اهرامات 'AA'B'D, 'CC'B'D, 'ACBB, 'ACDD, من مكعب الوحده , ولكل هرم من بينها 3 رؤوس بنفس الوجه, أي الحجم هو $\frac{1}{6}$ كما حسبنا سابقاً. لذلك للهرم D’’ACBالحجم هو $1-4\cdot\frac{1}{6}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.