בחינת סיווג במתמטיקה – (3.8.17)

פתרונות

שאלה 1:

מהי קבוצת כל המספרים הטבעיים n שעבורם $2^n < n!$?

פתרון: על ידי הצבה ניתן לראות כי עבור $n = 1,2,3$ הטענה לא נכונה אבל עבור $n = 4$ הטענה כן נכונה ובשלב זה אנו משערים כי הטענה נכונה לכל $n \geq 4$. ננסה להוכיח שהשערתנו אכן נכונה, באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 4$ מתקיים:

$$4! = 24 > 16 = 2^4$$

ולכן מקרה הבסיס נכון.

צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה עבור n ונוכיח אותה עבור $n + 1$.

בעזרת שימוש בהנחת האינדוקציה ובעובדה כי $n > 2$ מקבלים כי:

$$(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

אז הוכחנו את צעד האינדוקציה ולכן הוכחנו כי $n! > 2^n$ לכל $n \geq 4$, כנדרש.

לסיכום: $\{n \in \mathrm{N} : 2^n < n!\} = \{n \in \mathrm{N} : n \geq 4\} = \{4,5,6,\ldots\}$

שאלה 2:

מצאו את קבוצת כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה $z^2 + |z| = 0$

פתרון: למראה המשוואה צץ מיד הפתרון $z = 0$, נשמור אותו בזיכרוננו. כדי לאתר פתרונות שונים מ- 0 , נראה (נוכיח) תחילה שאם $z \neq 0$ מקיים את המשוואה, אז $|z| = 1$. ואכן:
המשוואה הנתונה שקולה למשוואה $z^2 = -|z|$ ומאחר שמספרים מרוכבים שווים הם בעלי אותו ערך מוחלט וערך מוחלט של ריבוע שווה לריבוע הערך המוחלט, מקבלים $|z^2| = |z|^2 = |(-|z|)| = |z|$ ומכאן $|z|^2 - |z| = |z|(|z| - 1) = 0$ ולפיכך (עבור $z \neq 0$) $|z| = 1$ כמובטח. לפיכך, לגבי פתרונות שונים מ-0, שקולה המשוואה הנתונה למשוואה

$$z^2 + 1 = 0$$

כלומר

$$z^2 = -1$$

ומכאן

$$z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

מסקנה: קבוצת כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה היא הקבוצה $\{0, i, -i\}$.

הערה: אפשר גם לגשת לפתרון המשוואה הנתונה על ידי העברת z להצגה פולארית ($z=re^{i\theta}$) ולפתור את המשוואה בצורתה הפולארית: $(re^{i\theta})^2+r=r^2e^{2i\theta}+r=0$. הגישה הישירה פשוטה יותר.

<u>שאלה 3:</u>

קבוצה S בת n איברים (למשל, הקבוצה $S=\{1,2,...,,n\}$) היא איחוד של k קבוצות $S_1,S_2,...,S_k$. הוכיחו או הפריכו: בהכרח, באחת או יותר מהקבוצות הנתונות, מספר האיברים הוא לפחות $\frac{n}{k}$.

פתרון: הטענה הזאת נכונה, ועל כן יש להוכיח אותה.

טיעון מילולי (חישבו, למשל, על $n=100$ ו- $k=12$ שאז $n/k=100/12=8+1/3$):
אילו בכל אחת מ- $k(=12)$ הקבוצות היו פחות מ- $n/k(=8+1/3)$ איברים, צירופן לקבוצה אחת, כלומר האיחוד שלהן (אפילו אם לאף שתיים מהן אין איברים משותפים ולא כל שכן אם יש כאלה), היה בהכרח מכיל פחות מ- n איברים (בדוגמה המספרית, לכל היותר $12\cdot 8=96$ איברים). לפיכך - לפחות אחת מהקבוצות חייבת להכיל לפחות n/k איברים (בדוגמה המספרית – אפילו יותר מאחת).

הוכחה פורמאלית:

נתון: גודל הקבוצה $|S|=n$ ו- $S=S_1\cup S_2\cup...\cup S_k$. אם בניגוד לטענה נניח שגודלי כל הקבוצות $\{S_i\}_{1\le i\le k}$ קטנים (ממש) מ- n/k נקבל

$$n=|S|=|S_1\cup S_2\cup...\cup S_k|\le|S_1|+|S_2|+...+|S_k|<k\cdot\frac{n}{k}=n$$

כלומר, הנחת השלילה של הטענה מובילה לסתירה ($n<n$) מה שמוכיח את נכונות הטענה.

<u>שאלה 4:</u>

האורכים של שתי צלעות במשולש הם a ו b . הוכיחו כי שטח המשולש S הוא לכל היותר $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$.

פתרון: נסמן ב- γ את הזווית בין הצלעות שאורכיהן נתונים בשאלה. אורך הגובה לצלע שאורכה a הוא $h=b\sin(\gamma)$ (רישום משולש מתאים ובו הגובה יבהיר מדוע) ולפיכך, שטח המשולש:

$$S=\frac{ah}{2}=\frac{ab\sin(\gamma)}{2}\le\frac{ab}{2}$$

כאשר אי-השוויון האחרון נובע מהעובדה ש-$\sin(\gamma)\le 1$ (שימו לב גם ש-$\sin(\gamma)>0$ כי זוויות של משולש נמצאות בקטע $(0,\pi)$).

ועתה, להשלמת ההוכחה של אי השוויון המבוקש, יספיק אם נוכיח כי

$$2ab \le a^2 + b^2$$

ואי שוויון זה הוא נכון כי $0 \le (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$.

לקיום שוויון, הכרחי ומספיק שיתקיים שוויון בשני אי-השוויונים שהשתמשנו בהם בדרך, כלומר $\sin(\gamma)=1$ השקול לכך ש-γ היא זווית ישרה, ו-$(a-b)^2=0$ השקול ל-$a=b$. מסקנה: שוויון מתקיים אם ורק אם המשולש הוא ישר זווית ושווה שוקיים שניצביו (השווים באורכם) הם הצלעות שאורכיהן נתונים בשאלה.

<u>שאלה 5:</u>

הוכיחו כי לכל $1<y,x$ מתקיים $\log_x y+\log_y x\ge 2$. עבור אילו ערכי y,x יתקיים השוויון?

פתרון א': נפעיל את אי שוויון הממוצעים על שני המחוברים באגף שמאל ונקבל:

$$\sqrt{\log_x y \cdot \log_y x} \le \frac{1}{2}(\log_x y + \log_y x)$$

מהנוסחה להחלפת בסיסי לוגריתמים נובע כי $\log_x y \cdot \log_y x = 1$ ולכן נקבל את מה שרצינו. שוויון באי שוויון הממוצעים מתקיים אם ורק אם:

$$\log_x y = \log_y x$$

וזה קורה אם ורק אם $x=y$.

הערה: התנאי $x,y>1$ מבטיח כי $\log_y x\ ,\log_x y>0$ ולכן מאפשר את השימוש באי שוויון הממוצעים. השוויון תקף לכל $x=y$ חיוביים (ולאו דווקא גדולים מ-1) כי אז כל אחד מהמחוברים שווה ל-1, ללא כל קשר לא"ש הממוצעים.

פתרון ב': נשתמש בנוסחה להחלפת בסיס ונקבל שאי השוויון הדרוש שקול לאי השוויון:

$$\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \ge 2$$

(כמובן שצריך כאן את הנתון $x,y>1$ כדי שלא נחלק ב-0 או במספר שלילי).

כעת, נסמן $t=\log_x y$ ונפתור את הא"ש:

$$t + \frac{1}{t} \ge 2$$

נכפיל את שני אגפי הא"ש ב-t (שהוא כמובן מספר חיובי בזכות הנתון) ונקבל:

$$t^2 + 1 \ge 2t$$

וזה כמובן פסוק אמת כי ההפרש בין אגף שמאל לאגף ימין אינו אלא $0 \le (t-1)^2$.

שוויון מתקיים אם ורק אם $t = 1 = \log_x y$, וזה קורה אם ורק אם $x = y$.

הערה: השימוש באי שוויון הממוצעים בפתרון א' חוסך את הצורך להוכיח שסכום של שני מספרים חיוביים שמכפלתם היא 1, הוא לפחות 2. כפי שראינו ההוכחה של עובדה זו היא מיידית וההוכחה של אי שוויון הממוצעים עצמו (לשני גורמים) היא מיידית באותה מידה: $0 \le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\sqrt{ab}$.

<u>שאלה 6:</u>

מצאו את קבוצת כל הפתרונות הממשיים של המשוואה $cos(\cos(x)) = 0$.

פתרון: נציב תחילה $y = \cos(x)$ ונקבל:

$$\cos(y) = 0$$

כידוע, ערכי y שעבורם פונקצית הקוסינוס מתאפסת הם

$$y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

כך שעלינו למצוא את כל ערכי x שעבורם

$$\cos(x) = y = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

אבל, כידוע, $-1 \le \cos(x) \le 1$, ולעומת זאת לכל $k \in Z$, $\pi/2 + k\pi \notin [-1,1]$, כך שאין בנמצא ערכי x כאלה, כלומר קבוצת הפתרונות המבוקשת היא הקבוצה הריקה $\emptyset$.

<u>שאלה 7:</u>

הצדיקו (באמצעות הוכחה) או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית מפורשת) את הטענה הבאה: אם היחס בין שני מספרים טבעיים m ו n אינו נופל מ-0.99 ואינו עולה על 1.01, אז ההפרש ביניהם (בערכו המוחלט) הוא לכל היותר 100.

פתרון: הטענה הזאת היא מופרכת מיסודה, והנה דוגמא נגדית המעידה על כך:

אם ניקח למשל $m = 1,000,200, \quad n = 1,000,000$ אז נקבל:

$$0.99 < \frac{m}{n} = 1.0002 < 1.01$$

אבל

$$|m-n| = 200 > 100$$

ובכן, הטענה הופרכה בקלות ולא קשה לחשוב על דוגמאות רבות נוספות המפריכות אותה.

הערה: מטרת השאלה הפשוטה הזאת היא להמחיש את ההבדל בין קירבה יחסית בין שני מספרים לבין קירבה הפרשית ביניהם. כדאי לשים לב: ההפרש בין שני מספרים יישאר קבוע ולא ישתנה אם נוסיף לכל אחד מהם אותו מספר, אך ככל שנגדיל את המספר הנוסף, היחס בין שני המספרים המתקבלים יתקרב ל1.

הנה המחשה מהחיים לתופעה זו: הפרש הגילים בין אם לביתה נשאר קבוע לאורך השנים אך ככל שעובר הזמן היחס בין גיליהן מתקרב ל-1. יתר על כן, אילו היו בנות אלמוות, ברבות הימים היה יחס זה נעשה קרוב כל כך ל-1 עד שלא הייתה אפשרות להבחין ביניהם (בין היחס לבין 1) ואילו ההפרש, כזכור, היה נשאר קבוע ושווה לגיל האם בזמן לידת הבת.

אמרו מעתה: קירבה יחסית בין מספרים אינה גוררת קירבה הפרשית. האם קירבה הפרשית גוררת קירבה יחסית? – חומר למחשבה!