

מבחן סיווג במתמטיקה לדוגמה

אין להשתמש במחשבון או כל חומר עזר.

1. חשבו את השטח של המשושה המשוכלל בעל צלע באורך a .
2. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 1$. נסמן ב- $f_2(x)$ את $f(f(x))$ ובאופן כללי ב- $f_n(x)$ את התוצאה המתקבלת כאשר מפעילים את f על x בדיוק n פעמים, כלומר $f_n(x)$ זה f של f של f ... של f (n פעמים) של x . מצאו נוסחה מפורשת $f_n(x)$, וחשבו את $f_n(1)$.
3. א. מצאו מספר ממשי x עבורו $|x+2| = |x-1|$. האם x כזה הוא יחיד? נמקו את תשובתכם.
ב. מהי קבוצת כל המספרים x עבורם $|x+2| < |x-1| < 3$?
4. מצאו את כל הערכים של x , עבורם $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.
5. מספר מרוכב z מקיים $z + \frac{1}{z} = 1$. מצאו את $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}}$.
6. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n ,
$$\frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n-1)^5 + n^5}{2} + \frac{1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots + (n-1)^7 + n^7}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^4.$$
7. מהו מספר הפונקציות החז"ע $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 10\}$?
8. פתרו את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 27 \\ x + y + 2z = 30 \end{cases}$$
9. בכמה אפסים מסתיימת הצגתו העשרונית של המספר $50! = 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$?

פתרון

1. חשבו את השטח של המשושה המשוכלל בעל צלע באורך a .

פתרון:

נחלק את המשושה ל-6 משולשים שווי צלעות בעלי צלע באורך a , עם קודקוד משותף במרכז המשושה.

שטח המשושה הוא כמובן סכום שטחי המשולשים החלקיים, ומאחר שששת המשולשים חופפים זה לזה ולכן הם שווי שטח, הרי שטח המשושה הוא 6 פעמים שטחו של משולש חלקי.

הגובה של כל משולש חלקי כזה הוא $a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ (לפי משפט פיתגורס). לכן שטח כל

משולש הוא $\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. מכאן, שטח המשושה כולו הוא $6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x - 1$. נסמן ב- $f_2(x)$ את $f(f(x))$ ובאופן כללי ב- $f_n(x)$ את

התוצאה המתקבלת כאשר מפעילים את f על x בדיוק n פעמים, כלומר $f_n(x)$ זה f של f של f

$f \dots f$ של f (n פעמים) של x . מצאו נוסחה מפורשת $f_n(x)$, וחשבו את $f_n(1)$.

פתרון:

הפונקציה הנתונה f היא פונקציה ליניארית של x . כמו כן, פונקציה ליניארית של פונקציה ליניארית אף

היא פונקציה ליניארית. לפיכך, הפונקציה f_n היא פונקציה ליניארית של x . נסמן ב- a_n את השיפוע שלה

וב- b_n את נקודת החיתוך שלה עם הציר האנכי, כלומר $f_n(x) = a_n x - b_n$. עלינו למצוא את a_n ואת b_n

כאשר נתון $a_1 = 2, b_1 = 1$

$$a_{n+1}x - b_{n+1} = f_{n+1}(x) = f(f_n(x)) = 2f_n(x) - 1 = 2a_nx - (2b_n + 1) \quad -1$$

מהשוואת מקדמים בשני האגפים הקיצוניים של שוויון זה מקבלים $a_{n+1} = 2a_n$ ו- $b_{n+1} = 2b_n + 1$ השקול

ל- $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$, כך שהסדרה $\{a_n\}$ היא סדרה גיאומטרית עם $a_1 = 2$ ומנה 2 ולכן $a_n = 2^n$ ואילו

הסדרה $\{b_n + 1\}$ אף היא סדרה גיאומטרית עם $b_1 + 1 = 2$ ומנה 2 ולכן $b_n + 1 = 2^n$ ומכאן ש-

$b_n = 2^n - 1$ וכמסקנה סופית:

$$f_n(x) = a_n x - b_n = 2^n x - (2^n - 1) = 2^n x - (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1})$$

מאחר ש- $f(1) = 1$ (הנקודה $x = 1$ היא נקודת שבת של f) הרי בדומה $f_n(1) = 1$ לכל $1 \leq n$.

פתרון

3. א. מצאו מספר ממשי x עבורו $|x-1| = |x+2|$. האם x כזה יחיד? נמקו את תשובתכם.

ב. מהי קבוצת כל המספרים x עבורם $|x-1| < |x+2|$?

פתרון:

א. הערך המוחלט של הפרש בין שני מספרים ממשיים הוא המרחק בין הנקודות על הישר הממשי המייצגות את שני המספרים. מבוקשות נקודות x הנמצאות במרחקים שווים מהנקודות 1 ו-2. הנקודה היחידה על הישר הנמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע $[-2, 1]$ היא אמצע הקטע (נקודות על הישר משמאל לנקודת האמצע הן קרובות יותר לקצה השמאלי שלו ואלה שהן מימין לאמצע – לקצה הימני).

$$\text{לפיכך למשוואה הנתונה יש פתרון יחיד והוא } x = \frac{(-2)+1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

הערה: במישור המרוכב יש ישר שלם של פתרונות למשוואה הנתונה. ישר זה הוא האנך האמצעי לקטע

$$[-2, 1] \text{ המתואר על ידי קבוצת המספרים המרוכבים } \{z = -\frac{1}{2} + iy : -\infty < y < +\infty\}.$$

ב. הנקודה x מקיימת את אי השוויון $|x-1| < |x+2|$ אם ורק אם x קרוב יותר ל-2 מאשר ל-1,

כלומר אם ורק אם x נמצא משמאל למרכז הקטע $[-2, 1]$ (לאו דווקא בקטע עצמו), כלומר $x < -\frac{1}{2}$. אי

השוויון השני $|x-1| < 3$ פירושו $1-3 < x < 1+3$, כלומר $-2 < x < 4$. קבוצת הפתרונות של שני אי השוויונים כאחת היא החיתוך של קבוצות הפתרונות של כל אחד מהם בנפרד, שהוא (כפי שמצאנו)

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cap (-2, 4) = (-2, -\frac{1}{2}). \text{ כלומר קבוצת המספרים } \{x : -2 < x < -\frac{1}{2}\}.$$

4. מצאו את על הערכים של x , עבורם $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.

פתרון:

את המשוואה הנתונה אפשר לכתוב גם כך: $\sin x - \sin 3x + \sin 5x = 0$.

תחילה נביא את אגף שמאל לצורה פשוטה יותר, תוך שימוש בנוסחה לסכום של שני סינוסים:

$$\sin x - \sin 3x + \sin 5x = \sin x + \sin(-3x) + \sin 5x =$$

$$= \sin x + \sin(x - 4x) + \sin(x + 4x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos 4x = \sin x \cdot (1 + 2 \cos 4x)$$

כלומר המשוואה המקורית שקולה ל:

$$\sin x \cdot (1 + 2 \cos 4x) = 0$$

מכאן (מאחר שמכפלה מתאפסת אם ורק אם לפחות אחד מגורמיה הוא אפס):

פתרון

או $\sin x = 0$ ואז $x = \pi k$ כאשר k שלם.

או $1 + 2 \cos 4x = 0$, ואז $\cos 4x = -\frac{1}{2}$, $4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi k$, כאשר k שלם.

5. מספר מרוכב z מקיים $z + \frac{1}{z} = 1$. מצאו את $z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}}$.

פתרון:

$(z + \frac{1}{z})(z - \frac{1}{z}) = z^2 - \frac{1}{z^2}$ ומאחר שהגורם הראשון באגף שמאל שווה ל-1, מקבלים $z - \frac{1}{z} = z^2 - \frac{1}{z^2}$ השקול ל- $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} = z^2 - z$ שממנו מתקבל $\frac{1}{z}(\frac{1}{z} - 1) = z(z - 1)$. מאחר ש- $z = 0$ לא מקיים את המשוואה הנתונה מותר לכפול את שני האגפים ב- z^2 ולקבל שהמשוואה האחרונה שקולה ל- $1 - z = z^3(z - 1)$ ומאחר שגם $z = 1$ לא מקיים את המשוואה הנתונה נובע כי $z^3 = -1$ ולכן $z^6 = 1$.

לפיכך:

$$z^{2015} = z^{6 \cdot 335 + 5} = z^5 \text{ ומכיון ש- } z^6 = z^5 \cdot z = 1, \text{ הרי } z^5 = z^{-1}, \text{ כלומר}$$
$$z^{2015} + \frac{1}{z^{2015}} = \frac{1}{z} + z = 1$$

פתרון

6. הוכיחו כי לכל מספר טבעי n ,

$$\frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n-1)^5 + n^5 + 1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots + (n-1)^7 + n^7}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^4$$

פתרון:

נוכיח את הטענה באינדוקציה.

$$\text{הבסיס ברור: עבור } n=1 \text{ מקבלים } \frac{1^5 + 1^5}{2} = 1^4.$$

נניח שהטענה נכונה עבור $n-1$, ונוכיח את נכונותה עבור n . לפי הנחת האינדוקציה:

$$\frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + (n-1)^5 + n^5 + 1^7 + 2^7 + 3^7 + \dots + (n-1)^7 + n^7}{2} = \left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^4 + \frac{n^5 + n^7}{2}$$

נותר אם כן להוכיח את הזהות

$$\left(\frac{(n-1)n}{2} \right)^4 + \frac{n^5 + n^7}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^4$$

השקולה לזהות

$$\frac{n^5 + n^7}{2} = n^4 \cdot \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{16}$$

השקולה (על ידי חלוקת שני האגפים ב- $\frac{n^4}{2}$) לזהות

$$n + n^3 = \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - n^4 + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1}{8}$$

השקולה (על ידי קיבוץ איברים במונה של אגף ימין) לזהות הברורה מאליה

$$n + n^3 = \frac{8n + 8n^3}{8}$$

בכך הוכח צעד האינדוקציה, ולכן הוכחה הטענה לכל מספר טבעי n .

פתרון

7. מהו מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 10\}$?

פתרון:

לקביעת $f(1)$ יש 10 אפשרויות, לכל קביעה של $f(1)$ נותרו 9 אפשרויות (שונות מהערך שנקבע ל- $f(1)$) לקביעת $f(2)$, כך שיש $10 \cdot 9 = 90$ אפשרויות שונות לקביעת הערכים של הפונקציה (באופן חח"ע) בנקודות 1 ו-2. לכל אחת מ-90 אפשרויות אלה, נותרו 8 אפשרויות פנויות לקביעת $f(3)$. לבסוף, לאחר שייקבעו (באופן חח"ע) ערכי f על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$ (ולכך יש $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5,040$), ייוותרו 5 אפשרויות לקבוע את $f(5)$. כפועל יוצא: מספר הפונקציות המבוקש הוא $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5,040 \cdot 6 = 30,240$.

הערה: עבור מספרים טבעיים $k \leq n$ נוהגים לסמן את מספר הפונקציות החח"ע

$f: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ ב- $(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$. בסימון זה מצאנו למעלה ש- $(10)_5 = 30,240$.

8. פתרו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 23 \\ x + 2y + z = 27 \\ x + y + 2z = 30 \end{cases}$$

פתרון:

נחבר את כל המשוואות ונקבל: $4x + 4y + 4z = 80$, כלומר $x + y + z = 20$.

נחסיר את המשוואה האחרונה מכל אחת מהמשוואות המקוריות, ונקבל:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \\ z = 10 \end{cases}$$

כך ש- $(x, y, z) = (3, 7, 10)$ הוא פתרון של מערכת המשוואות הנתונה. כדי לבחון את יחידות הפתרון, נניח שהוקטור (a, b, c) אף הוא פתרון. בהנחה זו, וקטור ההפרשים $(a-3, b-7, c-10)$ פותר את המערכת ההומוגנית (זו שבה המספרים באגף ימין מוחלפים באפסים) של המערכת הנתונה. וזיקוי הצעדים שבצענו כדי לקבל את הפתרון $(3, 7, 10)$ ייתן $(a-3, b-7, c-10) = (0, 0, 0)$ כלומר $a=3, b=7, c=10$, זאת אומרת שאין למערכת פתרונות אחרים זולת זה שמצאנו.

פתרון

הערה: יחידות הפתרון נובעת גם מהרגולריות של המערכת, כלומר מהעובדה שמטריצת המקדמים של שלושת הנעלמים היא הפיכה (הווקטורים $(1,1,2)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$ הם בלתי תלויים ליניארית במרחב התלת מימדי).

9. בכמה אפסים מסתיימת ההצגה העשרונית של המספר $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50 = 50!$?

פתרון:

בין 1 ל-50 (כולל) יש 10 מספרים שמתחלקים ב-5, 2 מתוכם מתחלקים ב- $5^2 = 25$, ואף אחד מהם אינו מתחלק ב- $5^3 = 125$. לכן $50!$ מתחלק ב- 5^{12} , אך לא מתחלק ב- 5^{13} (ולכן גם לא ב- 10^{13}).

בין 1 ל-50 יש יותר מ-12 מספרים זוגיים ולכן $50!$ מתחלק ב- 10^{12} אך כאמור לא ב- 10^{13} ולכן המספר $50!$ נגמר ב-12 אפסים.